МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

На правах рукописи

Дотдаев Альберт Шамилевич

ЭЛЕКТРОННЫЙ ТРАНСПОРТ В СИСТЕМАХ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ИНВАРИАНТОМ

Специальность 1.3.8 — «Физика конденсированного состояния»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
Родионов Ярослав Игоревич

Москва — 2025

Оглавление

Введение

Данная работа посвящена транспортным явлениям в системах, описываемых динамическими уравнениями, обладающими нетривиальным топологическим инвариантом. Так, уравнения движения одноэлектронных устройств во мнимом времени имеют инстантонные решения, характеризуемые целым индексом накрытия (число намоток); Вейлевские полуметаллы описываются Гамильтонианом, обладающим ненулевой кривизной Берри (топологическим числом Черна); уравнения движения для краевых состояний топологического изолятора имеют топологическую защищенность ввиду наличия дискретной симметрии по отношению к обращению времени. Во всех трех случаях симметрия уравнений движения играет фундаментальную роль и придаёт сходные черты описываемым физическим явлениям. В случае кулоновской блокады конформная симметрия действия Амбегаокара-Экерна-Шёна (АЭШ) даёт инстантонные решения, ответственные за проявление кулоновской блокады в режиме сильной связи (большой безразмерный кондактанс туннельных контактов). В случаях Вейлевского полуметалла и топологического изолятора симметрия по отношению к обращению времени задаёт нетривиальные аналитические свойства волновых функций.

Актуальность и степень разработанности темы

Инстантоны в неравновесной Кулоновской блокаде. Впервые слабая кулоновская блокада была охарактеризована в рамках техники ренормгруппы (РГ)[1, 2] и позднее с использованием инстантонного анализа [3—6]. Численно эта проблема изучалась с помощью таких методов, как численная РГ [7] и квантовый метод Монте-Карло [8—10], которые позволяют изучать кулоновскую блокаду в промежуточном (между слабым и сильным) режиме. Более того, некоторые точные результаты могут быть получены с использованием аналогии действия АЭШ с так называемой моделью круговой браны [11, 12]. Теоретические предсказания для таких систем дополняются экспериментальными исследованиями, такими как в [13, 14] и более поздними [15, 16]. В транспортных свойствах эффект кулоновской блокады проявляется как слабые (экспоненциально малые по g) осцилляции кондактанса одноэлектронного транзистора (ОЭТ) с $q = C_g U_g / e$, [17]. Эта экспоненциальная малость может быть связана с тем, что осцилляции производятся инстантонами — нетривиальными решениями уравнений движения действия АЭШ.

Линейный отклик ОЭТ при тепловом равновесии описывается аналитически продолженными функциями отклика, которые зависят от мнимого времени. Инстантоны Евклидова действия

АЭШ были найдены Коршуновым[18], и их вклад в наблюдаемые величины был тщательно изучен [3, 17] в рамках техники Мацубары. Важные топологические аспекты описания кулоновской блокады с помощью действия АЭШ были дополнительно рассмотрены в [19—21]. Несмотря на то, что этот подход позволяет оценивать нелинейные функции отклика в предположении относительно сильных электрон-электронных взаимодействий, устанавливающих тепловое равновесие между островком и электродами[22], он неприменим в более общей неравновесной ситуации.

Первая попытка решения неравновесной ситуации была недавно предпринята Титовым и Гутманом[23]. В рамках техники Келдыша в реальном времени они рассмотрели частный случай ОЭТ, выведенного из равновесия конечным напряжением на затворном электроде. Они обобщили инстантоны Коршунова на этот частный случай и обнаружили, что значение действия на инстантонах, определяющее порядок величины эффекта, не зависит от смещения напряжения и остается таким же, как в равновесии.

С точки зрения теории поля, поиск инстантонов в неравновесной системе является старой нерешённой задачей. Сложность задачи проистекает из того факта, что неравновесие не позволяет использовать технику Мацубары, естественную для вычисления инстантонов. Единственным доступным инструментом является формализм Келдыша, который удваивает число степеней свободы и ещё больше усложняет уравнения движения.

Влияние анизотропии на магнитосопротивление вейлевских полуметаллов. Вейлевские полуметаллы [24—27] (ВПМ) [28—31] привлекают большой интерес в последние годы. Благодаря своему *релятивистскому* 3D-гамильтониану со скоростью Ферми, играющей роль скорости света, они демонстрируют интригующие транспортные свойства, фазовые переходы, вызванные беспорядком [32, 33], необычные топологические явления, например, существование дуг Ферми (открытых в импульсном пространстве поверхностных состояний, соединяющих фермионы Вейля противоположной хиральности [34]), и, наконец, ярко выраженные явления типа КЭД, такие как хиральная аномалия [35—38]. В некоторой степени ВПМ по сути является твердотельной реализацией физики КЭД.

Поперечное магнитосопротивление материала с безмассовым дираковским спектром в ультраквантовом режиме было теоретически изучено А.А. Абрикосовым [39] ещё в 1998 году. Он предположил, что основным источником беспорядка в соединении являются кулоновские примеси и обнаружил, что магнитосопротивление подчиняется линейному закону как функция магнитного поля H. В своей работе А.А. Абрикосов рассмотрел простейший изотропный бесщелевой полупроводник с линейным спектром, идентичным спектру дираковского полуметалла.

Влияние анизотропии ненаклоненного конуса Вейля на транспортные свойства ВПМ с кулоновским беспорядком пока не изучалось теоретически. Следует отметить комплексную работу [40], в которой были рассмотрены (хотя в основном численно) эффекты химического потенциала и температуры на магнитосопротивление в изотропном ВПМ с кулоновским беспорядком. Также следует отметить исчерпывающее исследование магнитосопротивления изотропных ВПМ с δ-коррелированным беспорядком [41]. Влияние сильного кулоновского беспорядка на поперечное магнитосопротивление было рассмотрено в статье [42]. Влияние анизотропии на транспорт ВПМ с дальним беспорядком без магнитного поля изучалось в работе [43].

Топологические изоляторы (ТИ) – это новые состояния квантовой материи, которые не могут быть адиабатически преобразованы в обычные изоляторы и полупроводники. Они характеризуются полной диэлектрической щелью в объеме и бесщелевыми состояниями, защищенными симметрией по отношению к обращению времени (TR - симметрией), на краю или поверхности. Возможные применения ТИ включают маломощную электронику[44] и устойчивые к ошибкам квантовые вычисления[45, 46]. Значительный интерес научного сообщества к свойствам ТИ обусловлен тем, что удаётся экспериментально наблюдать транспорт в краевых состояниях (в квантовых ямах HgTe) [47] и в поверхностных состояниях [48] (в кристаллах Bi_2Se_3). В большинстве случаев образцы 2D и 3D ТИ представляют собой разные соединения (исключением является HgTe [49]). Другие реализации одномерных топологически защищенных состояний включают состояния на краях между поверхностями трехмерного ТИ [50] и состояния, возникающие в ступенчатых краях [51, 52].

Главная особенность краевых состояний в 2D ТИ заключается в том, что из-за зацепления спина и импульса рассеяние (всегда являющееся рассеянием назад для краевых мод 2D ТИ) с неизбежностью сопровождается переворотом спина квазичастицы. Поэтому в отсутствие магнитных примесей упругое рассеяние краевых состояний строго запрещено. Таково замечательное проявление TR - симметрии для таких систем [53]. Важной особенностью всех ТИ является их сильное спин-орбитальное взаимодействие (СОВ), [54, 55]. Следует отметить, что в работе [56] уже исследовалось влияние инверсионной асимметрии интерфейса на краевые состояния в таких системах в поперечном магнитном поле. Однако в ней совершенно не учтены СОВ и влияние краевых деформаций.

Целью данной работы является аналитическое исследование влияния эффектов симметрии уравнений движения на транспортные свойства физических систем, обладающих указанными симметриями.

Задачи, решённые для достижения поставленной цели:

1. Решение уравнений движения действия Амбегоакара-Экерна-Шёна для одноэлектронного транзистора в общем стационарном неравновесном режиме слабой кулоновской блокады;
2. Вычисление магнитосопротивления Вейлевских полуметаллов с аксиально-анизотропным неотклоненным конусом Вейля в ультраквантовом режиме для слабого беспорядка;
3. Исследование рассеяния квазичастиц на краевых дефектах двумерного топологического изолятора в однородном магнитном поле методами Покровского-Халатникова и теории возмущений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Найдено точное решение нелинейных уравнений движения для действия Амбегаокара-Экерна-Шёна в общей стационарной неравновесной ситуации. Произведен расчёт главной экспоненты в амплитуде кулоновских осцилляций кондактанса одноэлектронного транзистора.

2. Произведён расчёт поперечного магнитосопротивления вейлевского полуметалла с аксиальной анизотропией электронного спектра в формализме Кубо-Гринвуда. Выявлены функциональные зависимости магнитопроводимости от полярного и азимутального углов, определяющих направление оси анизотропии относительно приложенных магнитного и электрического полей.

3. Краевые дефекты в двумерных топологических изоляторах в поперечном однородном магнитном поле приводят к рассеянию электронов, распространяющихся по краевым состояниям. Произведен расчет коэффициента отражения для произвольной деформации края с предэкспоненциальной точностью. Коэффициент отражения обнаруживает квантовые осцилляции как функция магнитного поля в режиме слабых полей.

Научная новизна. Впервые получены инстантоны в *неравновесном* режиме для одноэлектронного транзистора. Впервые теоретически исследована зависимость магнитосопротивления от полярного и азимутального углов между осью анизотропии и плоскостью приложенного напряжения в вейлевских полуметаллах с аксиально-анизотропным *неотклоненным* конусом Вейля. Впервые построена теория рассеяния краевых состояний в двумерных топологических изоляторах на краевых дефектах в присутствии магнитного поля.

Практическая и теоретическая значимость диссертации

Одноэлектронные устройства стали неотъемлемой частью теоретической и экспериментальной физики конденсированных сред [57, 58]. При низких температурах транспорт электронов через такие устройства затруднён кулоновской блокадой [59—63] — явлением, которое остаётся мощным инструментом для наблюдения за взаимодействием и квантовыми эффектами. Транспортные свойства одноэлектронных устройств очень чувствительны к электрическим полям, что делает их полезными в электрометрии и для обеспечения стандартов тока, температуры, сопротивления, а также в других приложениях [64].

Недавние эксперименты, проведённые в Вейлевских полуметаллах в ультраквантовом режиме (при котором температура и химический потенциал намного меньше, чем энергетический зазор между нулевым и первым уровнями Ландау (LL)), выявили ненасыщенное магнитосопротивление [65—68], линейное по магнитному полю H ($\rho_{xx} \propto H$). Как таковое, это поведение кажется удивительным, поскольку обычные аргументы времени релаксации предсказывают насыщение магнитосопротивления в сильных магнитных полях. Фактические ВПМ являются высокоанизотропными соединениями. К счастью для теоретического анализа, некоторые из самых популярных из них, такие как Cd_3As_2 [28] или Na_3Bi [69], приблизительно аксиально анизотропны с похожими отношениями скоростей Ферми: $\xi = v_\perp / v_\parallel \approx 4$ и ненаклонёнными конусами Вейля. Анизотропия ВПМ с ненаклонёнными конусами Вейля, как ожидается, окажет огромное влияние на экспериментальное изучение явлений переноса. Действительно, недавно пробудился активный экспериментальный интерес к последствиям анизотропии ВПМ с ненаклонёнными конусами Вейля [68, 70, 71].

Электронный транспорт на краю топологического изолятора должен быть топологически защищён от рассеяния. Однако, как показано в экспериментальных работах, баллистический транспорт наблюдается только для образцов длиной не более чем около 1 мкм [47, 72]. Результаты экспериментов пробудили интерес научного сообщества к поиску возможных механизмов рассеяния. На краях реальных образцов топологических изоляторов всегда присутствуют геометрические дефекты. В данной работе показано, что в присутствии магнитного поля они приводят к рассеянию краевых состояний.

Методы исследования. Основные результаты, представленные в диссертации, получены методом аналитических расчётов.

Достоверность изложенных в диссертации результатов обеспечивается следующими факторами. Результаты, полученные относительно инстантонов в неравновесной Кулоновской блокаде, дополняются экспериментальными исследованиями [13—16]. Результаты, полученные относительно магнитосопротивления в анизотропных Вейлевских полуметаллах, согласуются с более ранней теоретической работой [39] в изотропном пределе. Достоверность результатов, полученных относительно рассеяния в топологических изоляторах, обеспечивается идеальной согласованностью коэффициентов отражения, полученных двумя независимыми подходами.

Апробация работы. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались на: 26-й ежегодной научной конференции ИТПЭ РАН (Москва, 2025 г.) и на семинарах ИТФ РАН (Москва, 2024-25 гг.)

Личный вклад. Автор принимал активное участие в проведении всех аналитических расчётов, представленных в диссертации, и в подготовке текстов публикаций по теме диссертации.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 научных статьях [73—75], которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых Web of Science и Scopus.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 3 приложений. Полный объём диссертации составляет 84 страницы, включая 18 рисунков. Список литературы содержит 109 наименований.

Глава 1

Инстантоны в неравновесной Кулоновской блокаде

В данной главе рассмотрено строение одного из самых популярных одноэлектронных устройств: одноэлектронного транзистора (ОЭТ), Рис. 1.1. Он состоит из островка, соединенного с электродами через туннельные контакты, характеризующиеся безразмерной проводимостью g_R (g_L) для правого (левого) электрода. Режим кулоновской блокады характеризуется $T \ll E_{\rm ch}$, где T — температура и $E_{\rm ch} = e^2/2C_0$, C_0 — электрическая емкость точки. Островок также соединён с затворным электродом через переход с емкостью C_g. Назначение затворного электрода — управление потенциалом электронов на островке путём настройки напряжения затвора U_g.

Предполагается, что туннельные контакты имеют большое количество каналов проводимости $N_{\rm ch} \gg 1$, каждый из которых имеет небольшую безразмерную туннельную проводимость. Комбинация $g = g_l + g_R$ играет роль константы связи в нашем рассмотрении и предполагается большой $g \gg 1$. Это, в свою очередь, соответствует случаю ОЭТ в так называемом режиме *слабой кулоновской блокады*.

Помимо зарядовой энергии $E_{\rm ch}$ и температуры T (в неравновесных условиях, изучаемых в этой главе, можно думать о некоторой эффективной температуре для целей параметрических оценок), островок характеризуется следующими энергетическими параметрами (см. также работу [76]): энергией Таулеса $E_{\rm Th}$ и средним расстоянием между уровнями энергии электронов δ. Изучается режим $E_{\rm Th} \gg E_{\rm ch} \gg T \gg g\delta$. Энергия Таулеса является наибольшей, что позволяет рассматривать островок как нульмерный объект и описывать его одним фазовым полем $\phi(t)$. Параметр δ считается малым (*металлический предел*). Электрод представляет собой резервуар электронов, который достаточно велик, чтобы обеспечить приближение непрерывного спектра энергии электронов. В результате условие $T \gg g\delta$ подразумевает, что когерентное поведение электронов подавлено [77]. В этом режиме, который называется *взаимодействие без когерентности*[17], система хорошо описывается действием Амбегаокара-Эккерна-Шена (АЭШ)[78], которое также называют диссипативным действием (также известно, что оно описывает квантовую

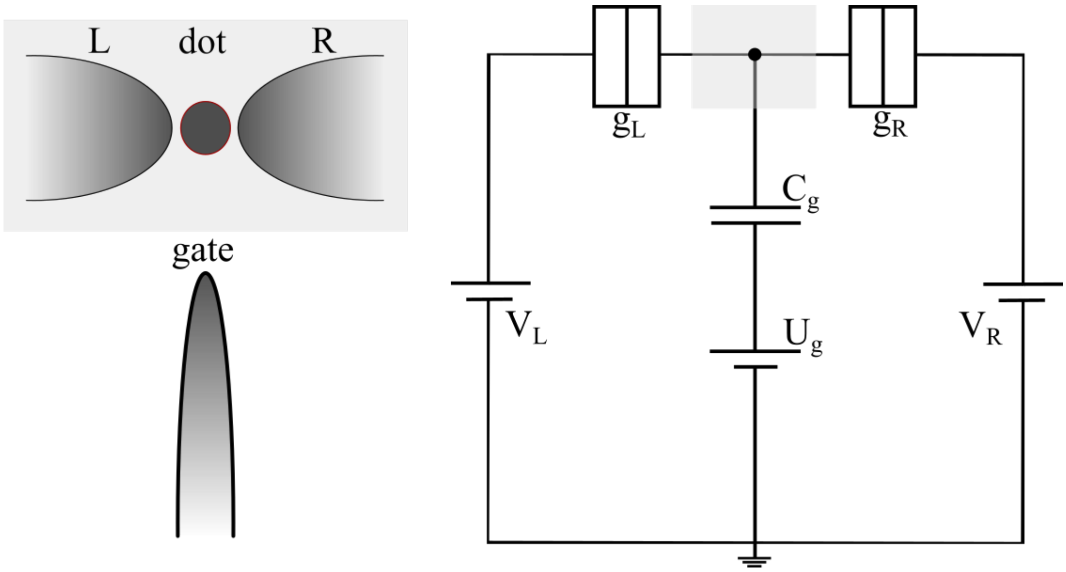

Рис. 1.1: Схематическое изображение одноэлектронного транзистора.

частицу на кольце[79, 80]).

В данной главе получены инстантоны действия АЭШ в общей стационарной неравновесной ситуации и показано, что значение действия на инстантонах не зависит от функций распределения электронов на электродах и на островке. Следовательно, главный показатель e^{iS}, вычисленный на конфигурации инстантонов, задается универсальным множителем $e^{-g/2}$ (как и в равновесии), не зависящим от конкретной реализации неравновесного режима.

1.1 Формализм

Гамильтониан для ОЭТ выглядит следующим образом:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_t + \hat{H}_{\text{ch}}. \tag{1.1}$$

Он состоит из следующих вкладов. Гамильтониан свободных электронов на островке и электродах,

$$\hat{H}_0 = \sum_{k,\alpha} \varepsilon_k^{(\alpha)} \hat{a}_k^{(\alpha)\dagger} \hat{a}_k^{(\alpha)} + \sum_m \varepsilon_m^{(d)} \hat{d}_m^\dagger \hat{d}_m, \tag{1.2}$$

где $\hat{a}_k^{(\alpha)\dagger}(\hat{d}_m^\dagger)$ — оператор рождения электрона с энергией $\varepsilon_k^{(\alpha)}(\varepsilon_m^{(d)})$ на выводе (островке), индекс $\alpha = R, L$ соответствует правому и левому электродам. Туннельный гамильтониан,

$$\hat{H}_t = \sum_{k,m} \Big(t_{km}^R \hat{a}_k^{R\dagger} \hat{d}_m + t_{km}^L \hat{a}_k^{L\dagger} \hat{d}_m + \text{h.c.} \Big), \tag{1.3}$$

где $t_{km}^{R,L}$ — амплитуды туннелирования между правым (левым) отведением и островком. Зарядовый гамильтониан,

$$\hat{H}_{\text{ch}} = E_{\text{ch}} (\sum_m \hat{d}_m^\dagger \hat{d}_m - q)^2, \tag{1.4}$$

где E_{ch} — это зарядовая энергия, а q — это фоновый заряд на островке, заданный потенциалом затворного электрода.

Полное действие для ОЭТ задается следующим интегралом по контуру Келдыша:

$$S = \int_K dt \left(i\hat{a}^\dagger \partial_t \hat{a} + i\hat{d}^\dagger \partial_t \hat{d} - \hat{H} \right) \tag{1.5}$$

Интегрирование по фермионным полям a, d с последующим $1/N_{\text{ch}}$ разложением числа каналов проводимости приводит к известному действию АЭШ: $S = S_{\text{ch}} + S_d$, где

$$S_{\text{ch}} = \int_K \left(\frac{\dot{\phi}^2(t)}{2E_{\text{ch}}} - q\dot{\phi}(t) \right) dt \tag{1.6}$$

— зарядовое действие, а

$$S_d = \frac{ig}{4} \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \bar{\mathrm{X}}^T(t) \hat{\Pi}(t,t') \mathrm{X}(t') \tag{1.7}$$

является диссипативной частью действия. Здесь $g = g_L + g_R$ и

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi^K + \Pi^R + \Pi^A & -\Pi^K + \Pi^R - \Pi^A \\ -\Pi^K - \Pi^R + \Pi^A & \Pi^K - \Pi^R - \Pi^A \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

— поляризационный оператор, его компоненты:

$$\Pi_\omega^{R,A} = \mp i \sum_{\alpha=R,L} \frac{g_\alpha}{g} \int [F_\varepsilon^d - F_{\varepsilon-\omega}^\alpha] \frac{d\varepsilon}{2\pi}, \qquad \Pi_\omega^K = 2i \sum_{\alpha=R,L} \frac{g_\alpha}{g} \int [1 - F_\varepsilon^d F_{\varepsilon-\omega}^\alpha] \frac{d\varepsilon}{2\pi}. \tag{1.9}$$

Полевые функции,

$$\bar{\mathrm{X}}^T(t) = \left(\frac{1}{\chi_+(t)} \quad \frac{1}{\chi_-(t)} \right), \qquad \mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} \chi_+(t) \\ \chi_-(t) \end{pmatrix}, \qquad \chi_\pm(t) = e^{-i\phi_\pm(t)} \tag{1.10}$$

являются векторами в пространстве Келдыша. Индекс $\pm$ у ϕ соответствует фазовому полю $\phi(t)$ на верхней (нижней) ветви контура Келдыша[81]. Функции $F^{d(L,R)}$ представляют собой функции распределения электронов на островке (электроде).

1.2 Инстантоны

1.2.1 Режимы неравновесия

В зависимости от размера островка ОЭТ, могут быть реализованы различные режимы неравновесия для электронов на островке. Режимы определяются двумя конкурирующими скоростями релаксации электронов: τ_{ee}^{-1} (релаксация из-за электрон-электронного взаимодействия), τ_E^{-1} (релаксация из-за туннелирования в резервуары). Отбрасывается возможное электрон-фононное взаимодействие, поскольку оно вымораживается при типично низких экспериментальных температурах. Соответствующие скорости электрон-электронной релаксации для мезоскопических устройств были получены в работах [82, 83]. Для прозрачности можно сформулировать две различные неравновесные ограничивающие ситуации. а) *квазиравновесный* режим, когда е–е релаксация преобладает над релаксацией за счет туннелирования ($\tau_{\text{ee}}^{-1} \gg \tau_E^{-1}$). В этом случае электроны термализуются до

$$T_d = \frac{g_L T_L + g_R T_R}{g}, \tag{1.11}$$

определяемой соответствующими температурами резервуаров б) *неравновесный* режим, когда термализация регулируется туннелированием. В последнем случае на островке устанавливается нефермиевская функция распределения электронов:

$$F^d = \frac{g_L}{g} F^L + \frac{g_R}{g} F^R. \tag{1.12}$$

Согласно оценкам, сделанным в работе [21], оба сценария экспериментально значимы. Для простоты сначала рассмотрим квазиравновесную ситуацию, а затем перейдем к более общему случаю.

1.2.2 Квазиравновесный случай

В этом случае равновесие нарушается конечной разностью температур электронов на электродах. Предполагается, что температуры электродов постоянны во времени. Затем электроны островка термализуются до стационарной неравновесной температуры (1.11).

Уравнения движения для этого конкретного случая:

$$\chi_\pm \frac{\delta S_d}{\delta \chi_\pm} = \frac{1}{2} \int (s_+ + s_-) \left(\frac{\chi_\pm}{\chi'_\pm} - \frac{\chi'_\pm}{\chi_\pm} \right) dt' + \int s_\mp \frac{\chi'_\mp}{\chi_\pm} dt' - \int s_\mp \frac{\chi_\pm}{\chi'_\mp} dt' = 0, \tag{1.13}$$

где $s_\pm \equiv s_\pm(t - t')$ вычисляются в Приложении A.1; $\chi'_\pm \equiv \chi_\pm(t')$, $\chi_\pm \equiv \chi_\pm(t)$. Уравнения движения (1.13) являются нелинейными интегральными уравнениями с сингулярным ядром; общие подходы для таких уравнений не разработаны или, по меньшей мере, довольно сложны. Однако их можно решить явно, если сделать соответствующие предположения об аналитических свойствах решений.

В духе источников [84] и [85] объединяются поля $\chi_\pm^{-1}(t)$ в одну функцию комплексного t:

$$\frac{1}{\chi_\pm(t)} = \frac{1}{\chi(t \mp i\delta)}, \ \delta > 0. \tag{1.14}$$

Мотивированные решением, найденным в работе [23], предполагаем, что функция $\chi^{-1}(t)$ имеет полюс при $t = t_0$ (с действительным t_0) и не имеет нулей или ветвей на действительной оси. Тогда $\chi(t)$ аналитична в некоторой окрестности действительной оси, поэтому эффективно $\chi_+(t) = \chi_-(t)$ для всех действительных t. Интегралы в уравнениях движения выражаются как контурные интегралы, взятые по контуру, показанному на Рис. 1.2, и могут быть вычислены через вычеты. Уравнения (1.13) затем сводятся к одному дифференциальному уравнению (см. Приложение

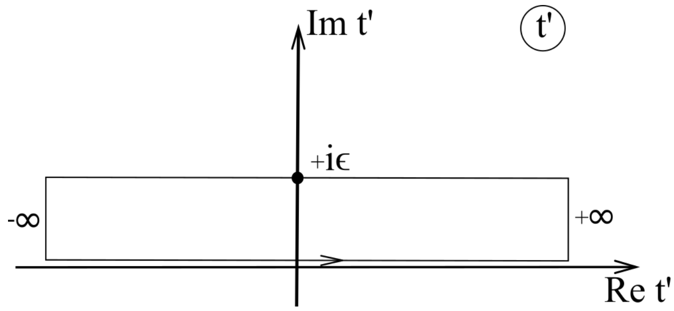

Рис. 1.2: Контур интегрирования в плоскости комплексного t'; ϵ — конечное положительное число, как и $\pi - \epsilon$.

A.2):,

$$\frac{1}{\pi^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\chi_\pm(t)}\right) = \frac{C_{-1}}{E_{\rm ch}}s_\pm(t_0-t), \tag{1.15}$$

где $C_{-1}/E_{\rm ch}$ — вычет $1/\chi(t)$ в точке t_0. В этой записи C_{-1} безразмерен, а размерный множитель $E_{\rm ch}$ естественен с точки зрения последующих вычислений.

Траекторию инстантона можно найти явно:

$$\frac{1}{\chi_\pm(t)} = C_{-1}\Big(\frac{1}{E_{\rm ch}}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' s_\pm(t_0-t') + B\Big). \tag{1.16}$$

Здесь отмечается, что свобода выбора t_0 отражает временную трансляционную инвариантность действия АЭШ. Кроме того, B — это параметр, такой что $\chi^{-1}(t)$ не имеет нулей на действительной оси. Это означает, что B является действительным числом и принадлежит интервалу

$$[-E_{\rm ch}^{-1}{\rm Re}\int_{-\infty}^{\infty} dt s_+(t), 0]$$

.

В равновесии ($T_L = T_R$) инстантоны в уравнении (1.16) становятся инстантонами Коршунова: $\chi_\pm(t) \sim \coth(t - t_0)$, источник [23]. Обратите внимание, что простая полюсная структура стационарных конфигураций седловых точек интегралов по траекториям в реальном времени типична для более элементарных (недиссипативных) квантово-механических задач, таких как туннелирование в двухъямном потенциале[86].

Параметры B и t_0 являются двумя нулевыми модами флуктуационного действия (расширенное решение вблизи инстантона). Их диапазон определяет предэкспоненциальный фактор при вычислении всех наблюдаемых. Однако вычисление физических наблюдаемых выходит за рамки данной работы.

Действие на этих инстантонах легко вычисляется (используя интегралы по контурам, как показано на Рис. 1.2), получаем:

$$S_0 = \frac{ig}{2}, \qquad S_{\rm ch} = \pi\Big(\int\limits_0^\infty \Big[s_+(t) + \frac{i}{\pi^2 t^2}\Big]dt + B\Big). \tag{1.17}$$

Здесь $S_0,\ S_{\text{ch}}$ — диссипативная и зарядовая части соответственно. Довольно удивительно, что диссипативная часть S_0 такая же, как и в равновесии, несмотря на то, что система по сути неравновесна, а инстантоны и действие зависят от каждой из температур T_L и T_R. Подобная поразительная особенность присутствует в статье [23]. По этой причине было решено изучить систему в состоянии более общего стационарного неравновесия. В данном случае это означает, что электроны на островке и электродах имеют произвольные функции распределения электронов.

1.2.3 Произвольное неравновесие

В этом разделе рассмотрен случай стационарного произвольного неравновесия. Компоненты поляризационного оператора зависят только от разности времени $(t-t')$ (ввиду стационарности функций распределения). Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\int \Pi_{\pm\pm}(t'-t)\Big(\frac{\chi_\pm}{\chi'_\pm}-\frac{\chi'_\pm}{\chi_\pm}\Big)dt'+\int \Pi_{\mp\pm}(t'-t)\frac{\chi_\pm}{\chi'_\mp}dt'-\int \Pi_{\pm\mp}(t-t')\frac{\chi'_\mp}{\chi_\pm}dt'=0. \tag{1.18}$$

Здесь Π_{++} и Π_{--}, $\quad \Pi_{-+}$ и Π_{+-} — матричные элементы $\hat{\Pi}$ (Приложение A.2).

Здесь важно: несмотря на то, что $\widehat{\Pi}$ состоит из функций распределения произвольного неравновесия, её разложение в ряд Лорана в окрестности $t-t'=0$ универсально и почти не зависит от функций распределения. Например, (наиболее важная) компонента Келдыша выглядит так:

$$\Pi^K(t)=-\frac{i}{2\pi^2}\left(\frac{1}{(t+i0)^2}+\frac{1}{(t-i0)^2}\right)+\Pi_{\text{reg}}(t), \tag{1.19}$$

где $\Pi_{\text{reg}}(t)$ — функция, аналитическая на вещественной оси, см. вывод в Приложении A.2.

Уравнения движения теперь становятся:

$$\mp\frac{2i}{\pi^2}\frac{\dot{\chi}_\pm(t)}{\chi_\pm(t)}+\frac{2i}{\pi^2}\frac{C_{-1}}{E_{\text{ch}}}\frac{\chi_\pm(t)}{(t-t_0\mp i0)^2}\pm\frac{i\mu_0}{\pi}\left(\frac{\chi_\pm(t)}{\chi_\mp(t)}+\frac{\chi_\mp(t)}{\chi_\pm(t)}\right)\pm 2\pi i\frac{C_{-1}}{E_{\text{ch}}}\chi_\pm(t)\Pi_{\text{reg}}(t_0-t)=0. \tag{1.20}$$

Их решениями являются:

$$\frac{1}{\chi_\pm(t)}=C_{-1}\Big(\frac{1}{E_{\text{ch}}}\frac{1}{t-t_0\mp i0}+\chi_{\text{reg}}(t-t_0)\Big), \tag{1.21}$$

где $\chi_{\text{reg}}(t)=L\{\Pi_{\text{reg}}(t),\mu_0\}+B$ — функция, регулярная на действительной оси, зависящая от функций распределения электронов на контактах и островке; B — комплексный параметр, связанный условием, что $\chi_\pm^{-1}(t)$ не имеет действительных нулей.

Значение диссипативного действия, рассчитанного на этих инстантонах, равно:

$$S_0=\frac{ig}{2} \tag{1.22}$$

Подчеркивается, что диссипативное действие снова такое же, как и в равновесии.

Мультиинстантонные решения даются произведениями различных инстантонов:

$$\frac{1}{\chi_{W\pm}(t)} = \frac{C_{-1}}{E_{\mathrm{ch}}^W} \prod_{i=1}^{W} \left(\frac{1}{t - t_i \mp i0} + \chi_{i\,\mathrm{reg}}(t - t_i) \right) \tag{1.23}$$

Диссипативное действие на этих траекториях равно WS_0.

Мультиинстантонный вклад соответствует гармоникам в зависимости проводимости от напряжения затвора, наблюдаемым в работе [16]. Уравнения (1.21) и (1.22) являются основными результатами данной главы.

Таким образом, доказано, что значение седловой точки диссипативного действия одинаково для любой неравновесной системы (при условии, что функции распределения стационарны).

1.3 Выводы

Изучены непертурбативные решения действия АЭШ, описывающие одноэлектронное устройство, с использованием техники Келдыша. Рассмотрен произвольный неравновесный режим и получена точная форма инстантонов. Вычислено перевальное значение действия. Поразительно, что оно не зависит от функций распределения электронов, с условием, что они стационарны. С нашей точки зрения, этот факт указывает на некоторую скрытую симметрию в этой задаче, которая пока не установлена.

Действие на инстантонах определяет ведущую экспоненциальную зависимость $e^{-g/2}$ связанных физических наблюдаемых (например, перенормированной энергии зарядки, проводимости ОЭТ). Зависимость от распределения электронов проявится в предэкспоненциальном множителе (вычисление потребует учета гауссовских флуктуаций вокруг инстантонов вместе с интегрированием по нулевым модам t_0 и B). Было бы также интересно развить этот подход для нестационарной неравновесной установки. И, наконец, важный вопрос заключается в том, сохраняется ли универсальный результат (1.22) для ОЭТ с наиболее общим соединением, рассмотренным в [4].

Глава 2

Влияние анизотропии на магнитосопротивление Вейлевских полуметаллов в сильном магнитном поле

В этой главе вычисляется магнитопроводимость и магнитосопротивление ВПМ с аксиально-анизотропным неотклоненным конусом Вейля в ультраквантовом режиме для не очень больших концентраций примесей (слабый беспорядок). Получено магнитосопротивление как функция магнитного поля, а также полярного и азимутального углов оси анизотропии (см. Рис. 2.1 для геометрии). Анализируется масштабирование компонент тензора проводимости с параметром анизотропии $\xi = v_\parallel / v_\perp$.

2.1 Модель

2.1.1 Гамильтониан

Начнем со стандартного анизотропного гамильтониана для электронов в потенциале кулоновского беспорядка

$$H = H_0 + H_{\text{imp}},$$
$$H_0 = \sum_{i=\perp,\parallel} \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma}_i \left(v_i \Big[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \Big]_i \right) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \tag{2.1}$$

$$H_{\text{imp}} = \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \tag{2.2}$$

где H_0 — анизотропный гамильтониан невзаимодействующих фермионов Вейля, $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ - операторы уничтожения и рождения фермионов, $\boldsymbol{\sigma}_\parallel = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_0)\mathbf{n}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_\perp = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{n}_0(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_0)$, - матрицы Паули, $v_\parallel$ и $v_\perp$ - скорости Ферми, а $\mathbf{n}_0$ - единичный вектор, определяющий направление оси анизотропии (см. рис. 2.1). Член H_{imp} отвечает за взаимодействие электронов с кулоновски-

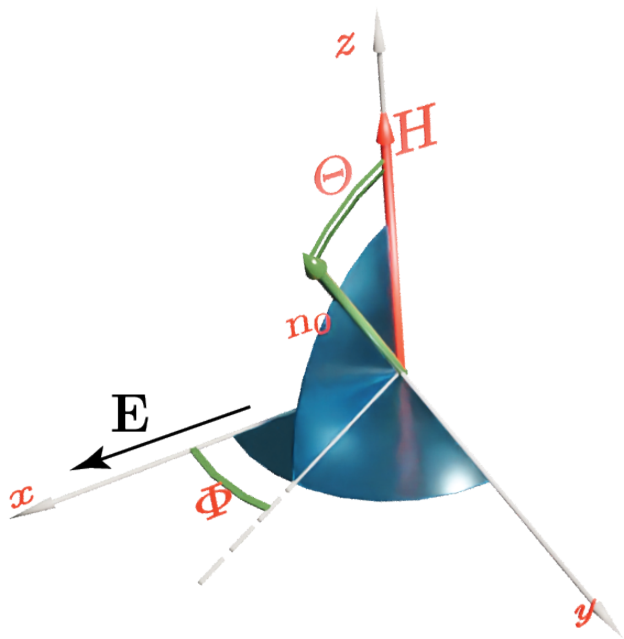

Рис. 2.1: Геометрия задачи. Ось анизотропии ($\mathbf{n}_0$) наклонена на полярный угол Θ и азимутальный угол Φ. Напряжение приложено вдоль оси x.

ми примесями. Поскольку нас интересует поперечное магнитосопротивление, магнитное поле перпендикулярно плоскости xy, т. е. плоскости, в которой производится измерение тока. Для справки приведены подробности вывода гамильтониана (2.1) в Приложении B.1.

Как известно, теорема Нильсена–Ниномии [87] гласит, что узлы Вейля должны появляться парами в зоне Бриллюэна. Однако из-за гладкости потенциала беспорядка (подробности см. в разделе «Обсуждение») отбрасывается рассеяние носителей заряда между узлами. Поэтому для определения полной проводимости просто умножаем результат от одного узла Вейля на количество узлов в зоне Бриллюэна ВПМ. Всюду в главе установлено $\hbar = 1$ и введена переменная Ω, связанная с магнитным полем (расстояние между нулевой и первой LL) и магнитной длиной l_H

$$\Omega^2 = \frac{2eHv_\parallel}{c}, \quad l_H^2 = \frac{c}{eH}. \tag{2.3}$$

2.1.2 Потенциал беспорядка

Экранированный потенциал беспорядка имеет вид

$$u(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon} \frac{1}{k^2 - \frac{4\pi e^2}{\epsilon}\Pi(k^2)}, \tag{2.4}$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость, а $\Pi(k)$ — оператор поляризации газа Ферми, взятый в статическом пределе (частота установлена равной нулю): $\Pi(k^2) \equiv \Pi(\omega, k^2)|_{\omega=0}$. В ситуации обычной ферми-жидкости импульс, передаваемый статическим потенциалом беспорядка носителю заряда, намного меньше импульса Ферми $k \ll k_{\mathrm{F}}$. Это влечет за собой возможность разложить $\Pi(k^2)$ по $k/k_{\mathrm{F}} \ll 1$ в уравнении (2.4), оставив только первый член: $\Pi(k) = \Pi(0) + k^2\partial_{k^2}\Pi(0) + ...$, где $\Pi(0) = -dn/d\mu$ — термодинамическая плотность состояний. Это приводит к стандартному статическому экранированию кулоновского взаимодействия.

В рассматриваемой в данной главе задаче, как будет видно в ходе вычислений, ситуация более тонкая. Роль импульса Ферми берет на себя обратная магнитная длина l_H^{-1}. Можно записать выражение для точного поляризационного оператора в следующей подходящей форме

$$\begin{aligned}\Pi(k^2) &= -\frac{dn}{d\mu}(1 + c_1(kl_H)^2 + c_2(kl_H)^4 + ...)\\ &= -\frac{dn}{d\mu}[1 + k^2l_H^2 f(k^2l_H^2)],\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $f(0) \neq 0$ и $f(x)$ — некоторая безразмерная функция, измеряющая отклонение поляризационного оператора от его значения при нулевом импульсе. При низких температурах занят только нулевой уровень Ландау и $dn/d\mu$ легко вычисляется (см., например, работу [88]), что дает $dn/d\mu = (2\pi^2 v l_H^2)^{-1}$. Используя уравнение (2.4), запишем следующее выражение для экранированного потенциала беспорядка:

$$u(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon}\frac{1}{k^2[1 + \frac{2\alpha}{\pi}f(k^2l_H^2)] + \frac{2\alpha}{\pi l_H^2}}, \tag{2.6}$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon\hbar v_{\parallel}}, \tag{2.7}$$

так называемая постоянная тонкой структуры для ВПМ.

Как будет видно, основной вклад в проводимость, связанную с потенциалом беспорядка, вносит область импульсов $k \lesssim l_H^{-1}$, где l_H определено в уравнении (2.3) (см. Приложение B.3 для получения подробной информации). В результате, в отличие от теории ферми-жидкости, аргумент функции f, входящей в знаменатель уравнения (2.6), имеет порядок единицы. Следовательно, в рассматриваемой задаче все выражение равно $f(k^2l_H^2) \sim \mathcal{O}(1)$, при условии, что $f(x)$ не имеет полюсов на вещественной оси при $x \sim 1$. Это действительно так, как можно вывести, например, из [[89]].

Однако, как хорошо известно, типичная ВПМ, например Cd_3As_2, имеет дополнительный малый параметр $\alpha \ll 1$, который для Cd_3As_2 равен $\alpha \approx 0.05$ [28, 90]. Это радикально упрощает проводимый в данной главе анализ. Учет точного $\Pi(k^2)$ в кулоновском беспорядке (2.4) вместо $\Pi(0)$ эквивалентен сохранению члена с функцией f в выражении (2.6). Однако, как видно из (2.6), f входит с малым префактором α в перенормировку кулоновского поля.

Таким образом, сохранение члена, содержащего f в кулоновском взаимодействии (2.6), дает малые (порядка α) поправки к наблюдаемым. В отличие от этого, в данной работе сохраняются только члены порядка $\mathcal{O}(\ln\alpha)$ и $\mathcal{O}(1)$. Поэтому $\Pi(k^2)$ в потенциале беспорядка (2.4) заменяется на на $\Pi(0)$ и используется стандартное выражение Линдхарда для перенормированного кулоновского потенциала:

$$u(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon}\frac{1}{k^2+\kappa^2}, \tag{2.8}$$

где $\kappa^2 = 2\alpha\pi^{-1}l_H^{-2} \ll l_H^{-2}$ — это квадрат обратной длины экранирования Дебая.

2.1.3 Преобразование тензора проводимости

Прежде чем двигаться дальше, вполне уместно ввести перемасштабирование, которое делает спектр изотропным

$$r_\parallel = r_{s,\parallel}, \quad r_\perp = \xi r_{s,\perp}, \quad \psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\xi}\psi_s(\mathbf{r}_s), \quad v_\perp = \xi v_\parallel. \tag{2.9}$$

Преобразование (2.9) делает часть гамильтониана без беспорядка изотропной

$$\begin{aligned} H_{s,0} &= -iv_\parallel \int \psi_s^\dagger(\mathbf{r}_s)\boldsymbol{\sigma}\left(\nabla_{\mathbf{r}_s} - i\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_s(\mathbf{r}_s)d\mathbf{r}_s, \\ H'_{\mathrm{imp}} &= \int \psi_s^\dagger(\mathbf{r}_s)u(\mathbf{r}_{s,\parallel}+\xi\mathbf{r}_{s,\perp})\psi(\mathbf{r}_s)d\mathbf{r}_s. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Преобразование выполняется в три этапа. Сначала производится поворот системы координат так, чтобы новая ось z' стала параллельной оси анизотропии. Производится поворот на угол Φ вокруг оси z, а затем на угол Θ вокруг преобразованной оси y (см. рис. 2.1).

$$\sigma = R\sigma' R^{-1}, \tag{2.11}$$

где матрица R представлена в Приложении B.1, уравнение (B.2). Во-вторых, выполняется перемасштабирование. Перемасштабированный тензор проводимости обозначается в повернутом базисе как σ'_s. Верное правило преобразования не сразу очевидно. Подробности обобщены в Приложении B.2. Правило преобразования имеет вид

$$\sigma' = S_1\sigma'_s S^{-1}, \tag{2.12}$$

где матрицы S и S_1 определяются уравнениями (B.10) и (B.11)

Масштабное преобразование также изменяет компоненты вектора магнитного поля $\mathbf{H}$. Закон преобразования выведен в Приложении B.2, (см. уравнение (B.9))

$$\mathbf{H}_s = H(-\xi\sin\Theta,\ 0,\ \xi^2\cos\Theta). \tag{2.13}$$

Мы видим, что магнитное поле изменяется по закону

$$H_s = \xi\eta H, \quad \eta = \sqrt{\xi^2\cos^2\Theta + \sin^2\Theta}. \tag{2.14}$$

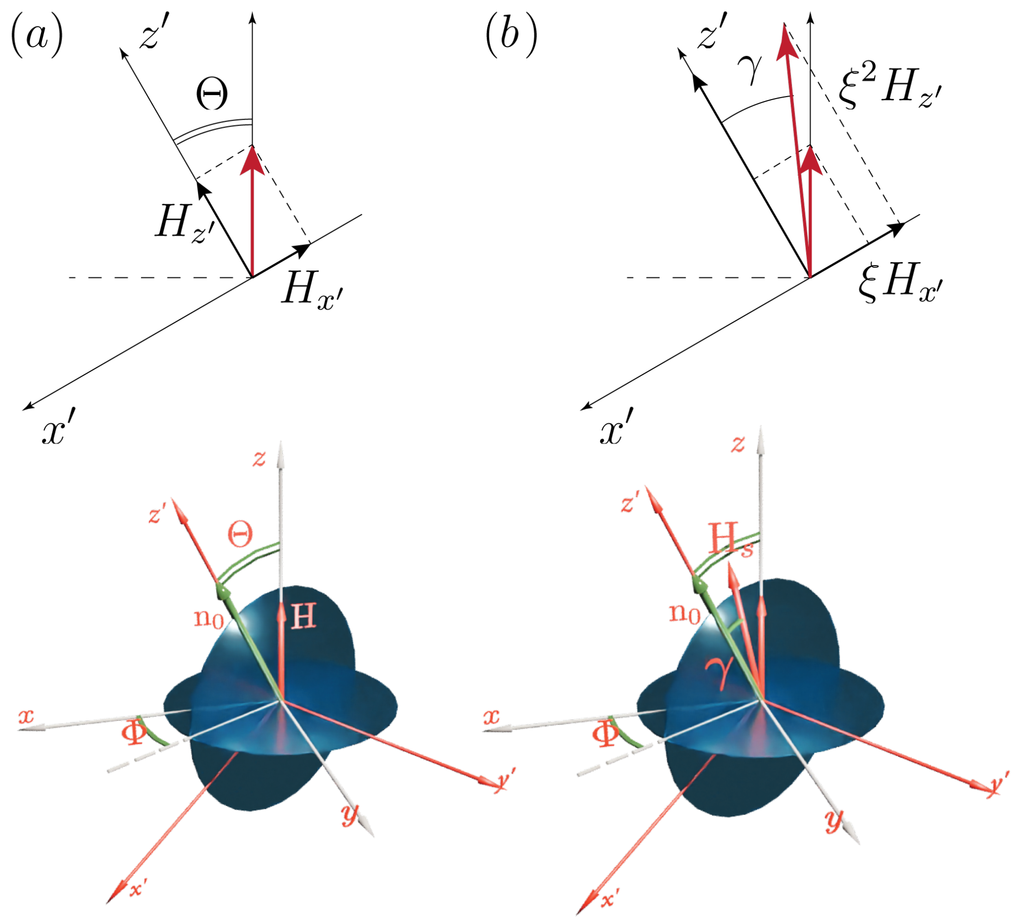

Рис. 2.2: (a) Повернутый базис x', y', z'. Ось z' ориентирована вдоль вектора анизотропии $\mathbf{n}_0$. (b) Положение масштабированного вектора магнитного поля $\mathbf{H}_s$ после масштабирования. Видно, что он остается в плоскости $z'y'$, но повернут на угол γ вокруг оси y'.

Важно отметить, что уравнение (2.13) также влечет за собой изменение угла наклона вектора относительно масштабированного базиса (хотя направление вектора, конечно, остается неизменным). Однако, чтобы подчеркнуть тот факт, что измеряемый угол изменяется, вектор $\mathbf{H}_s$ изображен в несколько ином направлении на рис. 2.2 для наглядности). Как видно на рисунке, масштабированный вектор магнитного поля наклонен на угол

$$\gamma = -\arctan\left(\frac{1}{\xi}\tan\Theta\right) \tag{2.15}$$

в повернутой плоскости $(x'z')$ относительно оси z'. Для упрощения расчета проводимости необходимо перейти в систему координат, в которой ось z направлена вдоль вектора магнитного поля. Поэтому необходимо выполнить обратный поворот на угол γ в плоскости $(x'z')$ (соответствующую матрицу поворота обозначим как R_γ). Обозначим новый тензор проводимости в еще раз повернутом базисе как σ'_s

$$\sigma_s = R_\gamma \sigma'_s R_\gamma^{-1}, \tag{2.16}$$

где матрица R_γ идентична матрице R из уравнения (B.2) с точностью до замены $\Theta \to \gamma,\ \Phi \to 0$. В результате исходный тензор проводимости и перемасштабированный, и повернутый тензор связаны следующим преобразованием

$$\sigma = RS_1 R_\gamma \sigma'_s R_\gamma^{-1} S^{-1} R^{-1}. \tag{2.17}$$

Это приводит к следующему окончательному выражению для связи компонент тензора проводимости в повернутом перемасштабированном базисе и исходном

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{\xi^2}\left[\eta^2 \sigma'_{s,xx} \cos^2\Phi + \xi^2 \sigma'_{s,yy} \sin^2\Phi\right], \tag{2.18}$$

где η определено в уравнении (2.14).

Здесь отмечается, что ось анизотропии теперь наклонена на полярный угол γ в плоскости $(x'z')$. Последнее означает, что азимутальный угол оси равен нулю. Компоненты тензора проводимости, в общем случае, должны зависеть от углов Эйлера.

Далее можно понять, что компоненты тензора проводимости $\sigma'_{s,xx}$ и $\sigma'_{s,yy}$ должны зависеть от компонента вектора, определяющего направление оси анизотропии (вектора анизотропии). Однако единственное геометрическое различие между компонентами тензора $\sigma'_{s,xx}$ и $\sigma'_{s,yy}$ заключается в ориентации вектора анизотропии относительно плоскости $x'y'$. Следовательно, имеем $\sigma'_{s,yy}(\varphi) = \sigma'_{s,xx}(\pi/2 - \varphi)$, где φ — азимутальный угол.

Также следует обратить внимание на поведение проводимости (2.18) при $\Theta = 0$. В этом случае ось анизотропии совпадает с направлением магнитного поля. В такой ситуации азимутальный угол Ф, строго говоря, не определён. Поэтому тензор проводимости предполагается независимым от Φ при $\Theta = 0$. Как будет доказано в следующем разделе, при $\Theta = 0$ (ось анизотропии ориентирована вдоль направления магнитного поля) получаем, что $\sigma'_{s,xx} = \sigma'_{s,yy}$, а из уравнения (2.18) следует соотношение $\sigma_{xx} = \sigma'_{s,xx}$. Последнее вполне естественно, поскольку в этом случае система фактически становится изотропной в плоскости (xy).

2.1.4 Экранирование Дебая

Обратная длина экранирования Дебая определяется по стандартному уравнению:

$$\kappa^2 = \frac{4\pi e^2}{\epsilon}\frac{dn(H)}{d\mu}, \tag{2.19}$$

где n — плотность частиц, определяемая химическим потенциалом μ. Самый простой способ вычислить плотность частиц в приложенном магнитном поле — перейти к перемасштабированному вращающемуся базису. Перемасштабированная плотность связана с исходной через преобразование: $n_s = \xi^2 n$ (см. обсуждение уравнения (B.11)). В результате дебаевское экранирование определяется как

$$\kappa^2 = \frac{1}{\xi^2}\frac{dn_s(H_s)}{d\mu} \equiv \frac{1}{\xi^2}\frac{2\alpha}{\pi l_{H_s}^2}, \tag{2.20}$$

где $l_{H_s} = c/eH_s \equiv c/(eH\xi\eta)$ — магнитная длина в перемасштабированной системе координат.

Перемасштабированный потенциал беспорядка приводит к модифицированной функции корреляции беспорядка, определяемой стандартным выражением метода диаграмм беспорядка $g(\mathbf{p}) = n_{\mathrm{imp}}|u(\mathbf{p})|^2$

$$g(\mathbf{p}) = \frac{16\pi^2 n_{\mathrm{imp}}\xi^2\alpha^2 v_{\parallel}^2}{(\xi^2 p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + \xi^2\kappa^2)^2}. \tag{2.21}$$

Теперь всё готово для вычисления проводимости. Для этого используется формализм Кубо. Как обычно, проводимость содержит два различных вклада: один, который исходит из отдельного усреднения функций Грина, и вершинную поправку.

2.2 Проводимость σ_{xx}

2.2.1 Выражения Кубо и функции Грина

Выражение для проводимости задается стандартной формулой Кубо (см., например, работу [88])

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = 2e^2 v_{\parallel}^2 \int \frac{d\varepsilon d\mathbf{p} dx'}{(2\pi)^3}\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}\mathrm{Tr}\Big[&\langle \mathrm{Im}G_{11}^R(x,x';\varepsilon,\mathbf{p})\mathrm{Im}G_{22}^R(x',x;\varepsilon,\mathbf{p})\rangle \\ &+ \langle \mathrm{Im}G_{22}^R(x,x';\varepsilon,\mathbf{p})\mathrm{Im}G_{11}^R(x,x';\varepsilon,\mathbf{p})\rangle \\ &- \frac{1}{4}\langle\big[G_{12}^R(x,x';\varepsilon,\mathbf{p}) - G_{12}^A(x,x';\varepsilon,\mathbf{p})\big]\big[G_{12}^R(x',x;\varepsilon,\mathbf{p}) - G_{12}^A(x',x;\varepsilon,\mathbf{p})\big]\rangle \\ &- \frac{1}{4}\langle\big[G_{21}^R(x,x';\varepsilon,\mathbf{p}) - G_{21}^A(x,x';\varepsilon,\mathbf{p})\big]\big[G_{21}^R(x',x;\varepsilon,\mathbf{p}) - G_{21}^A(x',x;\varepsilon,\mathbf{p})\big]\rangle\Big].\end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение беспорядка, а $f(\varepsilon)$ — функция распределения Ферми. Интегрирование по импульсу $\mathbf{p}$ выполняется в плоскости (p_y, p_z). Последние две строки в уравнении (2.22) (обычно отсутствующие в стандартном анализе) появляются из-за поправок на вершины беспорядка и, как можно увидеть ниже, не исчезают только в анизотропном случае.

Функции Грина, входящие в (2.22), определяются следующим образом

$$G^R(x,x';\varepsilon,\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x_{p_y})G_n^R(\varepsilon,\mathbf{p}_n)S_n^{\dagger}(x'_{p_y}), \tag{2.23}$$

$$S_n(s) = \begin{pmatrix}\chi_n(s) & 0 \\ 0 & \chi_{n-1}(s)\end{pmatrix}, \quad G_n^R(\varepsilon,p_z) = \frac{\varepsilon + v\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_n}{(\varepsilon+i0)^2 - \varepsilon_n^2}, \quad x_{p_y} = x - p_y l_H^2. \tag{2.24}$$

Здесь $\chi_n(s)$ — нормированная волновая функция осциллятора n-го состояния, а

$$\mathbf{p}_n = (0, \sqrt{2n}/l_H, p_z) \tag{2.25}$$

— эффективный двумерный импульс.

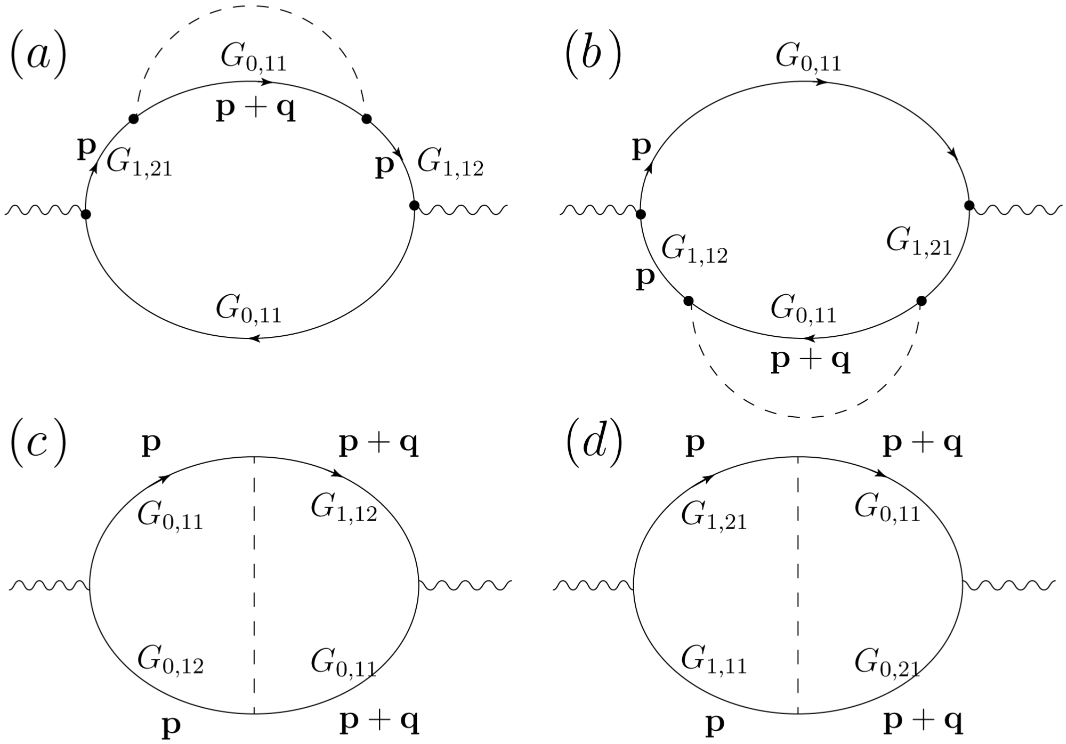

Рис. 2.3: Вклады первого порядка в проводимость σ_{xx}.

2.2.2 Суммирование диаграмм

В ультраквантовом пределе $(T \to 0)$ производная функции Ферми может быть заменена функцией δ, $\partial f(\varepsilon) = -\delta(\varepsilon - \mu)$, и интегрирование по энергии может быть выполнено явно. Нас будет интересовать предел малого химического потенциала, $\mu \ll \Omega$. В результате отбрасывается μ в дальнейшем вычислении σ_{xx} (но он сохраняется для вычисления σ_{xy}, чтобы получить неисчезающий результат). Как и в исследовании Абрикосова [39], только нулевой и первый уровни Ландау вносят вклад в проводимость.

Чистая система отображается на изотропную (уравнение 2.10), и результат для проводимости должен совпадать с результатом Абрикосова. Поэтому мы немедленно восстанавливаем исчезающую проводимость в нулевом порядке по степени беспорядка. Качественно это можно объяснить перпендикулярным к электрическому полю дрейфом электронных орбит. Таким образом, электронам необходимо рассеяние, чтобы дрейфовать в коллинеарном к электрическому полю направлении. Поэтому нужно суммировать диаграммы, показанные на рис. 2.3. Подробности вывода представлены в Приложении B.3.

В главном логарифмическом приближении (точность расчета Абрикосова [39]) проводимость σ_{xx} имеет вид

$$\sigma_{xx} = \frac{\alpha^3}{\Omega^2} v_\parallel^3 n_{\mathrm{imp}} \big[\cos^2\Theta + \xi^{-2}\sin^2\Theta \big] \ln\frac{1}{\alpha}. \tag{2.26}$$

Как видим, анизотропия проявляется в зависимости Θ уравнения (2.26). При $\xi = 1$ зависимость Θ пропадает, и уравнение (2.26) воспроизводит известный результат Абрикосова для изотропного ВПМ [39]. Однако проводимость (2.26) все еще не демонстрирует зависимость Φ. Это связано с недостаточной точностью логарифмического приближения. Результат можно улучшить более точным вычислением соответствующих интегралов.

После простого, но довольно громоздкого анализа приходим к следующему выражению (см. Приложение B.3)

$$\sigma_{xx} = \frac{\alpha^3}{2\pi\Omega^2} v_\parallel^3 n_{\rm imp} \left[\cos^2\Theta + \xi^{-2}\sin^2\Theta\right] \times \left[\ln\frac{4\pi\xi^2}{\alpha e^C(\xi+\eta)^2} - 2\frac{\xi\cos^2\Phi + \eta\sin^2\Phi}{\xi+\eta}\right], \tag{2.27}$$

где η определено в Ур. (2.14), а C — константа Эйлера–Маскерони.

Выражение (2.27) представляет собой α-разложение интегралов, входящих в формулу Кубо (2.22), где усреднение беспорядка выполняется с корреляционной функцией (2.21). Опущенные члены при вычислении интегралов, входящих в выражение Кубо (2.22), имеют порядок $\mathcal{O}(\alpha\ln\alpha)$. Именно с такой точностью вычисляется оператор поляризации в кулоновском потенциале (2.8), и это делает весь вывод самосогласованным. Графики с зависимостью магнитопроводимости от Θ и Φ представлены на рис. 2.4 и 2.5.

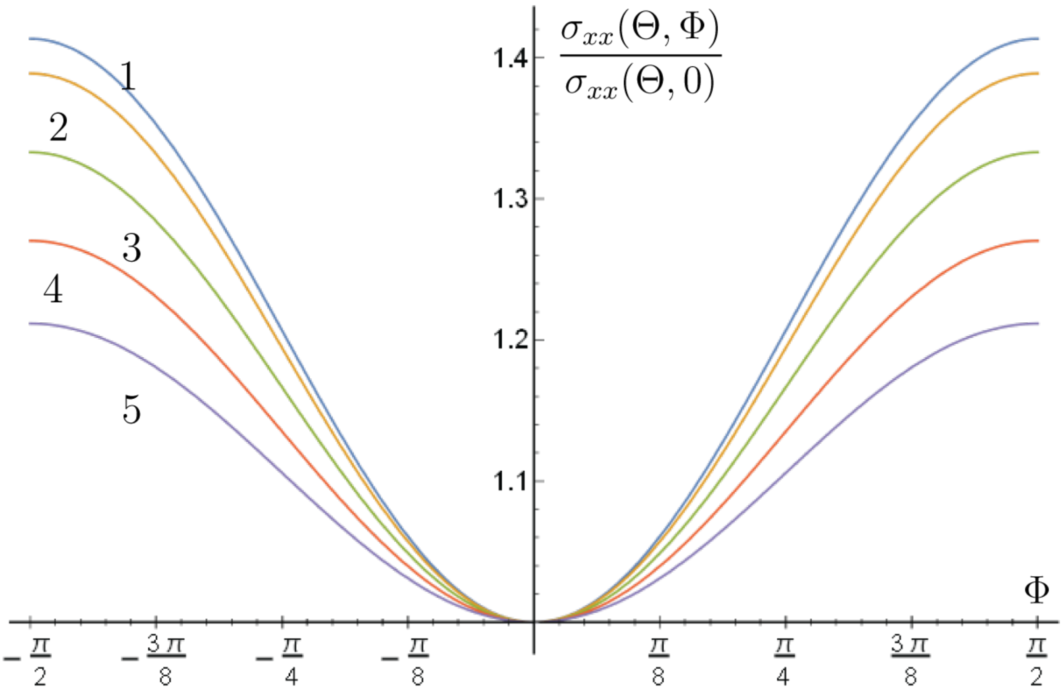

Рис. 2.4: Зависимость Φ проводимости σ_{xx} при различных значениях полярного угла Θ. Здесь Θ уменьшается с шагом $\pi/24$ (см. кривые с 1 по 5); $\Theta_n = \frac{\pi}{2} - (n-1)\frac{\pi}{24}$. Графики построены при реалистичных значениях $\xi = 4$ (Cd_2As_3) и постоянной тонкой структуры $\alpha = 0,05$.

2.3 Магнитосопротивление

Выражение для магнитосопротивления выглядит так:

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}. \tag{2.28}$$

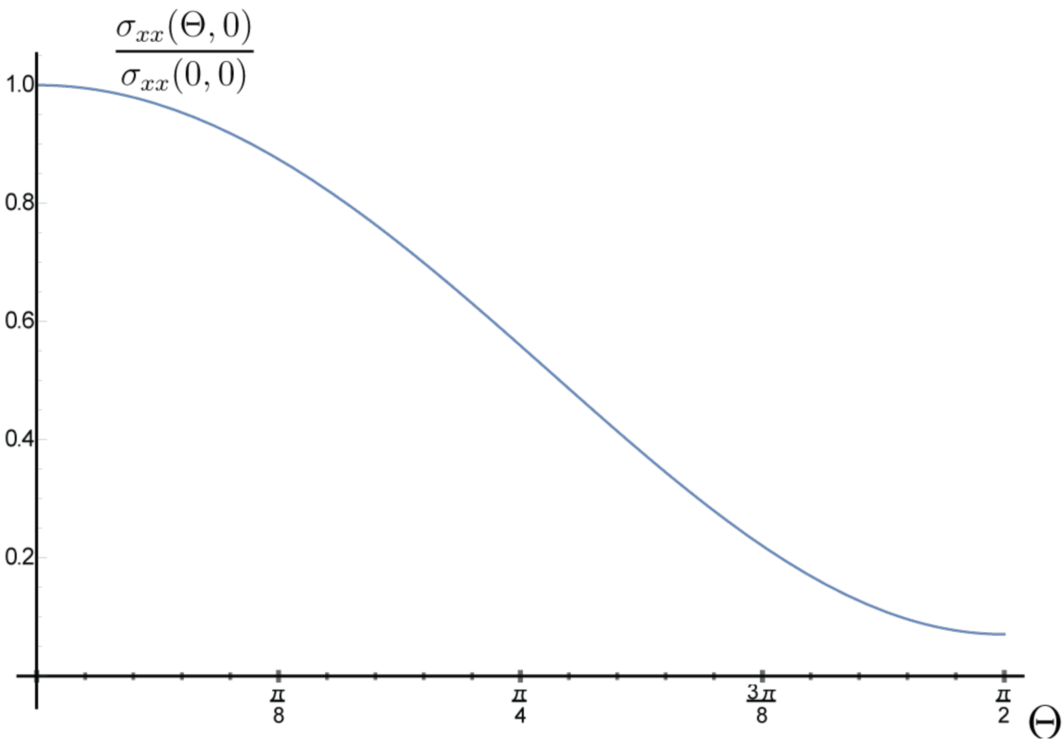

Рис. 2.5: Зависимость Θ проводимости σ_{xx} при $\Phi = 0$.

Два члена, входящих в знаменатель уравнения (2.28), не одного порядка: σ_{xx} пропорционален силе беспорядка, в то время как первый член в разложении беспорядка σ_{xy} не зависит от беспорядка. Как будет видно далее, для не очень высококомпенсированных ВПМ (см. точное условие ниже) условие $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}$ всегда выполняется.

2.3.1 Проводимость Холла σ_{xy}

Проводимость Холла включает аномальный и нормальный вклады. Полная проводимость не зависит от беспорядка в низшем порядке теории возмущений [39, 41]. Выражение, связывающее проводимость Холла в исходном и повернутом и перемасштабированном базисах, следует из уравнения (2.17) и имеет вид

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\xi}\sigma'_{xy,sc}\sqrt{\xi^2\cos^2\Theta + \sin^2\Theta}. \tag{2.29}$$

Выражение для проводимости Холла в ультраквантовом пределе в изотропной системе можно взять, например, из статьи [39]. Получается:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\cos^2\Theta + \xi^{-2}\sin^2\Theta}\,\frac{\alpha\mu}{4\pi^2}. \tag{2.30}$$

2.3.2 Вычисление магнитосопротивления

Необходимо выразить холловскую проводимость (2.30) через плотность носителей заряда. В масштабированном повернутом базисе она задается стандартным выражением [39]: $n_s = \Omega_s^2\mu/(4\pi^2 v_\parallel)$, где $\Omega_s^2 = 2eH_s v_\parallel/c$ — магнитное поле в масштабированном базисе координат.

Используя соотношение между магнитными полями (2.14), получаем следующее соотношение для плотности носителей заряда

$$n_0 = \frac{\Omega^2 \mu}{4\pi^2 v_\parallel} \sqrt{\cos^2\Theta + \xi^{-2}\sin^2\Theta}. \tag{2.31}$$

Мы видим, что условие $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}$ выполняется до тех пор, пока $\alpha^2 n_{\mathrm{imp}} \ll n_0$. В типичной ситуации условие электронейтральности влечет за собой $n_{\mathrm{imp}} \sim n_0$, поэтому $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}$ всегда выполняется.

Наконец, подставляя (2.31) в (2.30) и (2.28), получаем следующее выражение для магнитосопротивления

$$\rho_{xx} = \frac{\Omega^2 n_{\mathrm{imp}} v_\parallel}{n_0^2}\left[\cos^2\Theta + \xi^{-2}\sin^2\Theta\right] \times \left[\ln\frac{4\pi\xi^2}{\alpha e^C(\xi+\eta)^2} - 2\frac{\xi\cos^2\Phi + \eta\sin^2\Phi}{\xi+\eta}\right]. \tag{2.32}$$

Мы видим, что анизотропия четко выражена в реалистичной ВПМ, где (как в Cd_3As_2, $\xi^2 \approx 16 \gg 1$). Если ось анизотропии ориентирована перпендикулярно магнитному полю $\mathbf{H}$, отношение сопротивлений масштабируется как ξ^2

$$\frac{\rho_{xx}(\mathbf{H} \parallel \mathbf{n}_0)}{\rho_{xx}(\mathbf{H} \perp \mathbf{n}_0)} = \xi^2 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ln\alpha}\Big). \tag{2.33}$$

Выражения (2.27), (2.32) и (2.33) являются основными результатами данной главы.

Весьма интересно еще раз отметить, что зависимость сопротивления от азимутального угла Φ проявляется в сублидирующем к основному логарифмическому члену. Таково следствие усреднения по дальнему кулоновскому беспорядку.

2.4 Обсуждение

Изучено магнитосопротивление ВПМ с аксиальной анизотропией. Обнаружено, что магнитосопротивление сильно перенормируется как функция полярного и азимутального угла между осью анизотропии и плоскостью приложенного напряжения. Здесь уместны некоторые замечания. Во-первых, вычислен вклад в проводимость от одного узла Вейля. Если можно отбросить межузловое рассеяние беспорядком, то полную проводимость можно найти, умножив уравнение (2.32) на число узлов Вейля в зоне Бриллюэна. Межузловым рассеянием можно пренебречь, если импульс, передаваемый беспорядком, намного меньше расстояния между соседними узлами Вейля в импульсном пространстве. Для Cd_3As_2 это расстояние равно[91]: $2k_0 = 0,012$ Å^{-1}, а для TaAs [92] оно равно $2k_0 = 0,0183$ Å^{-1}. С другой стороны, обратная длина Дебая в типичном эксперименте по магнитотранспорту с полем $H \sim 1$ T равна $\kappa \sim 10^{-4}$ Å^{-1} (см. уравнение (2.8) и комментарий под ним). Поэтому, действительно, $2k_0 \gg \kappa$ и межузловым рассеянием можно смело пренебречь.

Как утверждалось в статье [93] при температурах $T \gtrsim n_{\mathrm{imp}}^{1/3} v$, электрон-электронное взаимодействие начинает доминировать в транспорте в ВПМ. Для типичного эксперимента по магнитотранспорту [94] плотность носителей заряда $n \sim 10^{18}$ см$^{-3}$, что дает предельную температуру $T \lesssim 360$ K для того, чтобы транспорт был доминирован кулоновским примесным рассеянием. Поэтому ожидается, что приведенные выводы должны быть справедливы в большинстве экспериментов, связанных с измерениями магнитосопротивления в ВПМ.

Глава 3

Рассеяние краевых состояний в топологических изоляторах в магнитном поле

В данной главе построена теория рассеяния в такой системе для широких классов профилей деформации края. Особое внимание уделяется аналитической структуре решений соответствующего уравнения Дирака. Будут изучены два взаимодополняющих случая: квазиклассический режим, соответствующий гладкой деформации края, а также режим теории возмущений по малому внешнему магнитному полю. В тех ситуациях, когда параметры задачи допускают применение обоих этих подходов, будет продемонстрировано совпадение полученных ответов. Предлагается модельный краевой гамильтониан, описывающий влияние СОВ на краевые дефекты. В использованном здесь подходе краевой дефект описывается профилем угла деформации (см. рис. 3.1). Упругое рассеяние становится возможным при наличии однородного магнитного поля, ортогонального кромке.

Приведенное здесь исследование призвано пролить некоторый свет на то, как TR - симметрия влияет на аналитические свойства амплитуды рассеяния. В отсутствие магнитного поля удаётся найти точное решение для любого профиля деформационного потенциала. Для гладких профилей деформации используется метод Покровского-Халатникова [95], позволяющий получить аналитическое выражение для амплитуды отражения с предэкспоненциальной точностью.

3.1 Модель

Предполагается следующая форма Гамильтониана для электронов в двумерном ТИ:

$$\begin{aligned} &\hat{H} = H_0 + H_{so}; \\ &H_0 = v_{F0}\hat{p}_x\hat{\sigma}_y, \quad H_{so} = \alpha\vec{\sigma}\times\vec{p}\cdot\vec{\nu}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

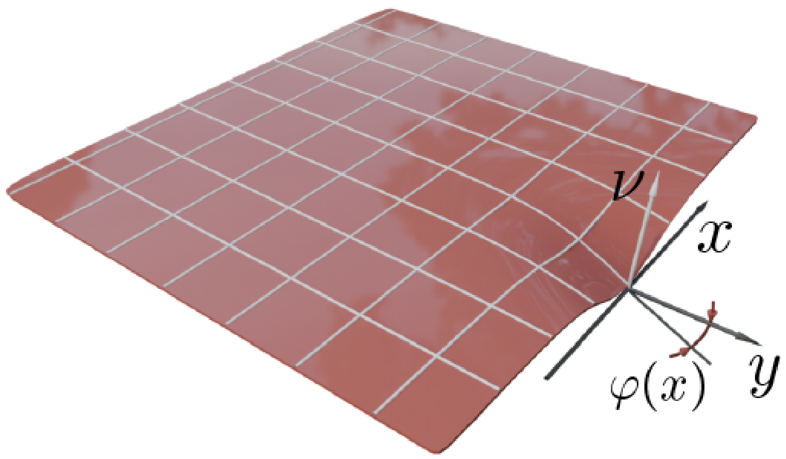

Рис. 3.1: Схематическая иллюстрация геометрического дефекта края в образце двумерного топологического изолятора

где H_0 — эффективный гамильтониан краевых состояний, движущихся вдоль оси x $(y = 0)$ [96] и $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ - матрицы Паули, действующие в базисе спина $1/2$. H_0 следует из особой зонной структуры, не зависящей от спин-орбитального взаимодействия, а v_{F0} представляет собой затравочную скорость Ферми.

Спин-орбитальный гамильтониан H_{so} написан стандартным образом для двумерного электронного газа [97]; $\vec{p}$ — импульс электронов, ν — единичный вектор, перпендикулярный поверхности (или границе раздела в гетероструктуре), α — параметр Рашбы, зависящий от материала и внешнего электрического поля (затворного напряжения)[54, 55]. Последнее вызывает расщепление энергетических зон из-за спина электрона (расщепление Рашбы), что хорошо видно в зонной структуре TI-материалов [55, 98].

Здесь важно отметить, как правильно следует выбрать направление вектора нормали ν в уравнении 3.1. В принципе, правильное направление можно определить из исходного гамильтониана ТИ, который мы здесь не приводим. Однако мы опираемся на результаты статьи [98], где показано, что скорость Ферми ТИ растет с уменьшением коэффициента Рашбы α. Как мы увидим ниже, правильное направление ν соответствует указанному на рис. 3.1.

Теперь рассмотрим деформацию края, представленную на рис. 3.1. Профиль изгиба образца в плоскости yz определяется функцией $\phi(x)$. Это, в свою очередь, приводит к модификации спин-орбитального взаимодействия:

$$H_{so} = -\alpha \hat{p}_x \hat{\sigma}_y + \hat{U}(x), \qquad \hat{U}(x) = \frac{\alpha}{2}[\hat{p}_x \phi(x) + \phi(x) \hat{p}_x]\sigma_z \tag{3.2}$$

для гладких и неглубоких деформаций ($\phi(x) \ll 1$). Здесь мы ввели антикоммутатор для сохранения эрмитовости исходного гамильтониана СОВ (3.1). Антикоммутатор необходим в силу того, что вектор нормали ν теперь стал функцией координаты x. Первый член в (3.2), $-\alpha \hat{p}_x \hat{\sigma}_y$, , как видно из исходного гамильтониана (3.1), просто перенормирует скорость Ферми. Последний член в (3.2) предполагается рассматривать как потенциальный профиль упругого рассеяния задачи. В дальнейшем было бы удобно включить в функцию профиля параметр α: $\varphi = \alpha\phi$.

Потенциальный профиль $\hat{U}$ в (3.2) сам по себе не приводит к рассеянию краевых состояний, поскольку не нарушает TR - симметрию. Однако, как мы увидим, в присутствии магнитного поля это не так. Приложим магнитное поле в направлении оси z (перпендикулярно плоскости образца топологического изолятора). Выберем следующую калибровку вектор-потенциала: $\vec{A} = (\mathcal{H}y, 0, 0)$. Координата y в нашем случае остается постоянной $y = \mathrm{const}$, которую смело можно положить равной нулю (альтернативно, для постоянной y векторный потенциал можно убрать из уравнения Дирака с помощью тривиального калибровочного преобразования). Таким образом, единственным изменением эффективного гамильтониана является добавление взаимодействия спина с магнитным полем (зеемановское слагаемое):

$$\hat{H}^{1D}(x) = v_F \hat{p}_x \sigma_y + \mu\sigma_z + \hat{U}(x), \tag{3.3}$$

где $v_F = v_{F0} - \alpha$ — перенормированная скорость Ферми, а $\mu = \mu_B g \mathcal{H}$, g — g-фактор для краевых электронов [99]. Мы прикладываем поперечное магнитное поле, ввиду того, что магнитное поле в плоскости не влияет на краевые состояния, поскольку соответствующий член в гамильтониане можно исключить калибровочным преобразованием операторов электронного поля [100].

Следовательно, нам необходимо решить задачу рассеяния для следующего уравнения Дирака:

$$\left[v_F \hat{p}_x \sigma_y + \mu\sigma_z + \hat{U}(x)\right]\psi(x) = \varepsilon\psi(x) \tag{3.4}$$

Легко видеть, что даже в отсутствие деформационного потенциала $\hat{U}(x)$ зеемановский член $\mu\sigma_z$ открывает щель в спектре краевого состояния ширины μ. Поэтому состояния рассеяния всегда имеют энергию больше μ и условие:

$$\varepsilon > \mu. \tag{3.5}$$

предполагается всегда выполненным.

3.2 Методы

Уравнение Дирака (3.4) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений первого порядка на дублет $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. Самым простым и (неожиданно) удобным подходом к её анализу оказалось приведение системы (3.4) к дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно единственной функции ψ_1:

$$2\hbar^2\left(\varphi^2+1\right)\alpha\psi_1''+2i\hbar\left[\hbar^2\left(\varphi^2+1\right)\varphi''+\varphi\alpha\left(2\mu-3i\hbar\varphi'\right)\right]\psi_1' + \left[\frac{1}{2}\alpha\beta(\alpha-2i\hbar\varphi')+4\varepsilon\hbar^2\varphi\varphi''\right]\psi_1 = 0, \tag{3.6}$$

$$\psi_2 = \frac{2\hbar\left(\varphi^2+1\right)\psi_1' - i\psi_1\varphi\beta(x)}{\alpha(x)},$$

где $\alpha(x) = 2(\mu + \varepsilon) - i\hbar\varphi'$, $\beta(x) = 2(\mu - \varepsilon) + i\hbar\varphi'$. В дальнейшем мы будем называть это уравнение *уравнением Дирака*. Дифференциальное уравнение (3.6) не может быть решено точно. Мы проанализируем его в двух различных подходах:

(i) квазиклассический метод, отвечающий плавной деформации $\varphi(x)$ ребра;

(ii) теория возмущений по напряженности магнитного поля (зеемановской энергии) μ. Затем мы покажем, как эти два подхода прекрасно сшиваются.

3.2.1 Квазиклассическое приближение

Исследование уравнения 3.4 в квазиклассической парадигме требует указания малого параметра задачи. Физически, квазиклассический подход предполагает гладкость потенциальной системы.

В нашем случае роль потенциала играет профиль краевой деформации $\varphi(x)$. Соответствующий масштаб изменения потенциала обозначим a. Следовательно, гладкость потенциала означает, что дебройлевская длина волны $\hbar v_F/\varepsilon$ намного меньше a:

$$\frac{\lambda}{a} \equiv \frac{\hbar v_F}{\varepsilon a} \ll 1 \quad (\textit{условие квазиклассичности}) \tag{3.7}$$

Как мы увидим в дальнейшем анализе, структура квазиклассического рассеяния в задаче такова, что ввиду условия (3.5) квазиклассический импульс никогда не обращается в нуль на вещественной оси, что делает рассеяние всегда *надбарьерным* событием. Наиболее адекватным подходом к решению задачи о надбарьерном отражении является метод Покровского-Халатникова (П-Х) [95]. Далее для удобства мы будем использовать *естественные* единицы $\hbar = v_F = 1$, восстанавливая их там, где это необходимо.

3.2.2 Метод Покровского-Халатникова

Идею метода можно сформулировать следующей последовательностью шагов (см. также изящную работу М. Берри [101]):

(i) Выполнить аналитическое продолжение квазиклассического решения в комплексную плоскость по так называемой антистоксовой линии $\mathrm{Im}\int_{z_0}^{z} k(z)\,dz = 0$, где $k(z)$ — квазиклассический импульс, а z_0 — точка поворота в комплексной плоскости.

(ii) Построить точное решение уравнения Шрёдингера в окрестности точки поворота z_0 (где импульс $k(z)$ можно разложить в ряд Тейлора, сильно упростив, таким образом, исходное уравнение).

(iii) Найти асимптотику точного решения на антистоксовых линиях, идущих вправо и влево от точки поворота.

(iv) Предполагая, что существует непустое пересечение области применимости асимптотик точного решения и квазиклассического решения (заштрихованная область на рис. 3.2) сшить их

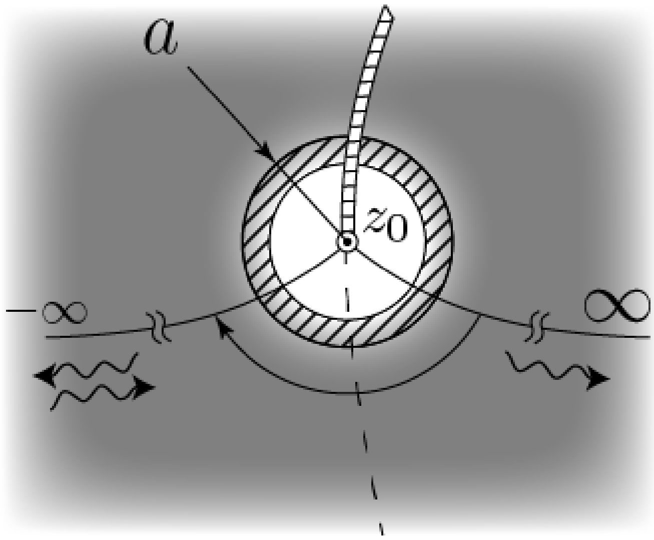

Рис. 3.2: К методу Покровского-Халатникова. Окрестность точки поворота z_0 со стандартным разрезом, идущим вверх. Серая область обозначает область применимости квазиклассического приближения (достигающую бесконечности в комплексной плоскости). Меньший круг радиуса a обозначает область применимости точного решения вблизи точки поворота. Две сплошные кривые, исходящие из точки поворота до $\pm\infty$, являются антистоксовыми линиями. Пунктирная линия — линия Стокса. Заштрихованная область — это область сосуществования квазиклассического и точного решения, в которых их можно сшить.

на антистоксовых линиях. (Задачу можно решить в квазиклассическом подходе тогда и только тогда, когда такое пересечение существует)

(v) Построить аналитическое продолжение решения с антистоксовой линии, идущей в $-\infty$, на вещественную ось $\psi(z) \to \psi(x)$.

Далее мы шаг за шагом будем реализовывать намеченную программу, объясняя все нюансы.

3.2.3 Квазиклассическое решение

Введем экспоненциальную замену $\psi \to e^{iS/\hbar}$ для волновой функции и используем стандартный квазиклассический аппарат, адаптированный к стационарному уравнению Дирака:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_{1,2} = \exp\left(\frac{iS_0}{\hbar} + iS_{1,2} + ...\right), \tag{3.8}$$

В нулевом порядке по $\hbar$ (или отбрасывая все члены с производными от φ в уравнении 3.6) получаем следующее выражение для S_0 (Приложение C.1.1):

$$S_0(x) = \int^x q_\pm(x')\, dx', \tag{3.9}$$

$$q_\pm = \frac{-\mu\varphi \pm p}{\varphi^2 + 1}, \quad p = \sqrt{\varepsilon^2(\varphi^2+1) - \mu^2} \tag{3.10}$$

где $q_\pm$ интерпретируется как квазиклассический импульс. Регулярная ветвь p выбирается таким образом, чтобы $p \underset{x\to+\infty}{\to} \sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2}$. Затем, сохранив уже члены порядка $\hbar$ ($S_{1,2}$ в замене (3.8)) и подставив ее в (3.6), мы получим предэкспоненциальные квазиклассические члены для волновой функции ψ:

$$\begin{aligned} &\psi_{1,\pm}(x) = \xi_{1,\pm}(x) e^{\frac{i}{\hbar}\int q_\pm\, dx} \quad \xi_{1,\pm} = \sqrt{\pm q_\pm \left[1 \pm \frac{\varphi\varepsilon}{p}\right]} \\ &\psi_{2,\pm}(x) = -i\psi_{1,\pm}\frac{\varepsilon\varphi \mp p}{\varepsilon + \mu} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Опять же, внешние квадратные корни, входящие в определение $\xi_{1,\pm}$, считаются положительными при $x \to +\infty$. Чтобы выяснить, какое из решений соответствует правым (левым) движущимся носителям, нам понадобятся квазиклассические токи:

$$j_\pm \equiv \psi_\pm^\dagger \sigma_y \psi_\pm = \frac{2q_\pm}{p}(\varepsilon - \mu) \tag{3.12}$$

При $x \to \pm\infty$ профильная функция $\varphi(x) \to 0$. Поэтому

$$j_\pm \underset{x\to\infty}{=} \pm 2(\varepsilon - \mu). \tag{3.13}$$

3.2.4 Исследование точек поворота

Теперь нам нужно найти те точки, в которых квазиклассичность решения нарушается. Обычно это точки ветвления квазиклассического момента $q_\pm$ (3.10). Эти точки на самом деле являются возможными особыми точками исходного дифференциального уравнения.

Точки ветвления p. Они одновременно являются и точками ветвления $q_\pm$:

$$\varphi(z_\pm) \equiv \varphi_\pm = \pm i\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}} \tag{3.14}$$

$$\varphi(z) = \varphi_\pm + (z - z_\pm)/a + ... \tag{3.15}$$

и квазиклассические импульсы, соответствующие различным линейным независимым решениям совпадают. Мы предполагаем, что точки ветвления имеют простейшую структуру, то есть являются корнями первого порядка $p^2(z)$. Соответствующая точка ветвления всегда находится вне действительной оси ввиду условия $\varepsilon > \mu$ (см. выражение (3.7)).

Разлагая потенциал $\varphi(z)$ в окрестности точек $z_\pm$, (уравнение3.15), мы сразу приходим к квазиклассическому условию (3.7) (после простой, но громоздкой алгебры, см. C.1.2) в виде $\varepsilon\hbar^2 v_F^2/[(\varepsilon^2 - \mu^2)^{3/2}|a||z - z_\pm|] \ll 1$, которое нарушается в точках $z \to z_\pm$. Поэтому точки $z_\pm$ должны быть включены в реализацию метода П-Х.

Здесь мы замечаем, что параметр a в разложении (3.15) в принципе является комплексным. Однако его модуль $|a|$ соответствует характерному масштабу потенциала $\varphi(x)$.

Нули $q_{\pm}$. Эти точки, если они существуют, являются наиболее естественными кандидатами, в окрестности которых квазиклассический подход не работает. Очевидно, им соответствуют сингулярности профильной функции $\varphi(z)$. Мы предполагаем самый простой, но наиболее распространенный тип особенности – простой полюс:

$$\varphi(z) = \frac{ia}{z - z_p} + ... \tag{3.16}$$

Здесь, как и раньше, $|a|$ соответствует характерной длине потенциала. Мнимая единица i введена для удобства. Точно так же, как было получено условие для точки ветвления p, мы получаем и квазиклассическое условие в окрестности точки поворота z_p, $q_{\pm}(z_p) = 0$: $\hbar v_F a\; ve/[(\varepsilon^2 - \mu^2)|z - z_p|^2] \ll 1$. Как и ожидалось, это условие также нарушается при $z \to z_0$. Поэтому z_p также следует включить в процедуру П-Х.

Об аналитической структуре $\varphi(z)$. Здесь следует вспомнить следующий факт из комплексного анализа. Если профиль деформации $\varphi(z)$ не является постоянной функцией, то функция обязана быть особенности в расширенной комплексной плоскости. Поэтому функция $\varphi(z)$ распадается на два общих класса: функция, имеющая особенности в конечных точках комплексной плоскости (типичным примером могут служить лоренцевы потенциалы), и функция, не имеющая особенностей в конечных точках комплексной плоскости (например, потенциалы гауссова типа). В последнем случае уместно следующее замечание. Поскольку $\varphi(x) \to 0, \; x \to \pm\infty$, последний класс соответствует ситуации, когда $\varphi(z)$ имеет существенную особенность в точке $z \to \infty$. Типичным примером может быть $\varphi(z) = P_n(z/a)e^{-z^2/a^2}$, где $P_n(z/a)$ — многочлен порядка из n. Наш анализ задачи, таким образом, разделен на два случая:

(i) Случай потенциала, регулярного в любой конечной точке.

(ii) Случай потенциала, имеющего особенности в конечных точках, когда тип особенностей ограничен простыми полюсами.

3.2.5 Регулярный потенциал

Этот случай соответствует классической обработке П-Х, адаптированной к более сложному уравнению Дирака.

Преобразование из уравнения Дирака в уравнение Шрёдингера. Чтобы сделать аналогию между уравнением Дирака Eq. 3.6 и уравнением Шрёдингера более выраженной, мы избавляемся от первой производной в (3.6) с помощью стандартной замены [102]. Уравнение преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\psi''(x) + \eta(x)\psi'(x) + \kappa(x)\psi(x) = 0 \Rightarrow \\
&\theta''(x) + \pi^2(x)\theta(x) = 0 \ \text{ (уравнение Шрёдингера)} && (3.17)\\
&\theta(x) = e^{\frac{1}{2}\int^x \eta(t)dt}\psi(x), && (3.18)\\
&\pi^2(x) = \kappa(x) - \frac{1}{2}\eta'(x) - \frac{1}{4}\eta^2(x). && (3.19)
\end{aligned}$$

Выражение для $\pi^2(x)$ вполне громоздко. Однако, поучительно записать $\eta(x)$ и $\pi^2(x)$, отбросив все производные потенциального поля $\varphi(x)$ (нулевое квазиклассическое приближение), а также квазиклассическое решение. Таким образом, связь с исходными квазиклассическими соотношениями (3.9), (3.10) становится прозрачной:

$$\eta(x) = \frac{2i}{\hbar}\frac{\mu\varphi(x)}{\varphi^2(x)+1}, \quad \pi^2(x) = \frac{\varepsilon^2(\varphi^2+1) - \mu^2}{(\varphi^2+1)^2} \tag{3.20}$$

$$\theta_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(x)}}\exp\left(\pm i\int_{x_0}^x \pi(t)dt\right). \tag{3.21}$$

В последнем уравнении точка x_0 должна быть выбрана на действительной оси. Таким образом, обе функции $\theta_\pm$ имеют одинаковый модуль. Кроме этого x_0 является совершенно произвольным и выбирается из соображений удобства. Чтобы быть уверенным, мы показываем в Приложении C.1.3, как (3.20)- (3.21) точно воспроизводят полные квазиклассические выражения (3.9)-(3.11), следующие из уравнения Дирака.

Точное решение вблизи точки поворота p. Теперь изложение следует знаменитой работе [95]. Тем не менее, мы хотели бы представить здесь некоторые детали, чтобы читатель понял механизм метода, чтобы иметь возможность следовать следующим разделам, которые более сложны.

Пришло время реализовать шаг (ii) метода П-Х. Для конкретности (и для того, чтобы сделать обозначения более краткими) нам нужно сделать выбор, какая точка будет иметь доминирующий вклад в коэффициент отражения. Как обычно (и это будет ясно видно позже), это ближайшая к точке действительной оси. Мы предполагаем, что это точка z_+. В ситуации с модельными потенциалами несколько точек ветвления могут быть равноудалены от действительной оси (например, $\varphi(z) = [\cosh(z/a)]^{-1}$). В этой ситуации все точки вносят одинаковый вклад в амплитуду отражения. Хотя они привлекательны с эстетической точки зрения и приводят к красивым ответам с квантовыми осцилляциями, эти ситуации не реалистичны и не будут здесь обсуждаться. С помощью (3.15) мы разлагаем квазиклассический импульс вблизи точки ветвления:

$$\pi^2(\zeta) = \frac{1}{\hbar^2}\frac{2i\zeta}{a}\frac{\epsilon^5\sqrt{\varepsilon^2-\mu^2}}{\mu^4} + ..., \quad \zeta = z - z_+ \tag{3.22}$$

так что уравнение (3.17) сводится вблизи точки ветвления z_+ к классическому уравнению Эйри:

$$\theta''(s) + s\theta(s) = 0, \quad s = \gamma^{1/3}\zeta, \quad \gamma = \frac{2i\varepsilon^5}{a\hbar^2\mu^4}\sqrt{\varepsilon^2-\mu^2}. \tag{3.23}$$

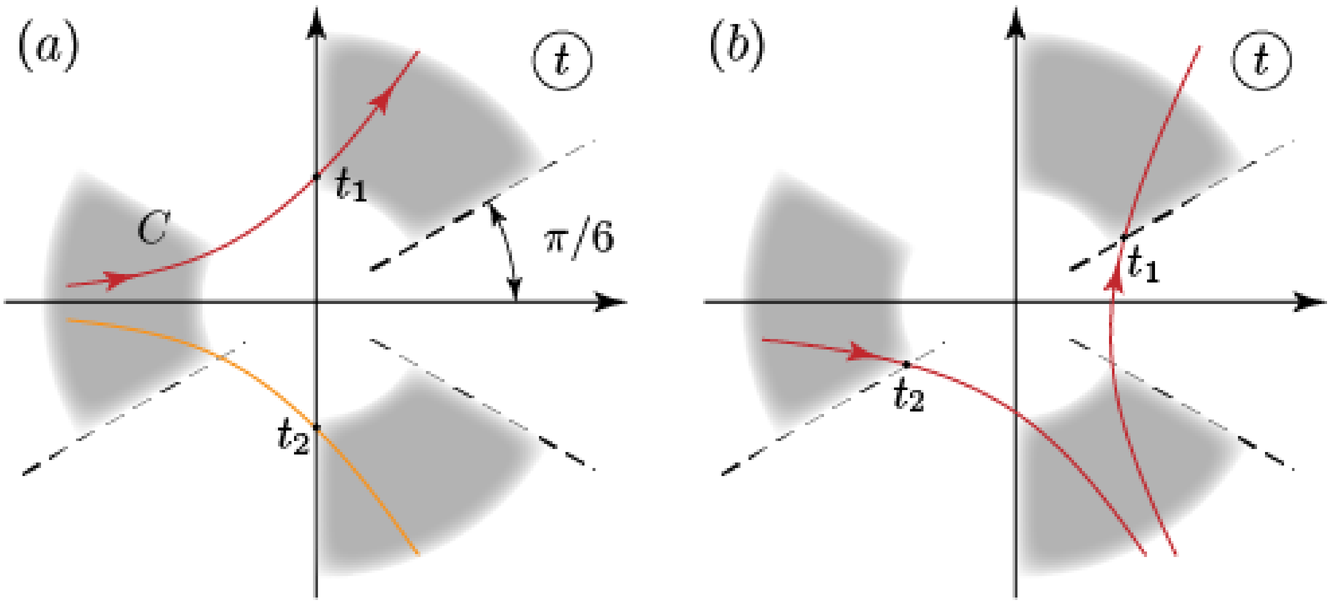

Рис. 3.3: (a) Расположение контура C, определяющего решение уравнения 3.25 для $\arg s = 0$. Асимптотические серые области — это области, которые должны содержать конечные точки контура. (для сходимости интеграла). $t_1,\ t_2$ — это седла подынтегрального выражения. Контур, нарисованный с помощью точного пути наискорейшего спуска, проходящего через седло $t1$, оранжевая линия — это второй путь наискорейшего спуска, проходящий через седло t_2. (b) Пути наискорейшего спуска и седла для $\arg s = -2\pi/3$

Подробности и тонкости вывода (3.23) см. в Приложении C.1.4. Асимптотика функции Эйри при больших значениях аргумента хорошо известна и должна быть сопоставлена с квазиклассическим разложением. Соответствующий анализ представлен в Приложении C.2. Квазические волновые функции (3.21) в окрестности $z_\pm$ на антистоксовой линии $n = 0$ (той, что идет вправо и соответствует исходящей волне) принимают следующий вид:

$$\theta_\pm^{\text{app}}(s) = \frac{1}{s^{1/4}\gamma^{1/6}} \exp\left(\pm\frac{2i}{3}s^{3/2}\right), \quad s \gg 1 \tag{3.24}$$

Точное решение уравнения Эйри (3.23), имеющее асимптотику (3.24), имеет следующее интегральное представление:

$$\theta(s) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}\gamma^{1/6}} \int\limits_C e^{st+t^3/3}\, dt, \tag{3.25}$$

где контур C представлен на рис 3.3(a). Чтобы сделать наше представление самодостаточным, мы выводим интегральное представление (3.25) в Приложении C.2. Контур размещен таким образом, что только седло $t_1 = i\sqrt{s}$ вносит вклад в асимптотику. Константа перед интегралом (3.25) выбрана таким образом, что асимптотика (3.25) при $s \to \infty$ в точности совпадает с квазиклассическим выражением (3.24) для $\theta_+^{\text{app}}(s)$. При повороте от правой антистоксовой линии к другой (идя влево под углом $-2\pi/3$) асимптотика решения (3.25) преобразуется как:

$$\theta_<(s) = \frac{1}{\gamma^{1/6}}\left(\frac{\exp\left[\frac{2i}{3}s^{3/2}\right]}{s^{1/4}} - i\frac{\exp\left[-\frac{2i}{3}s^{3/2}\right]}{s^{1/4}}\right). \tag{3.26}$$

из-за того, что контур интегрирования деформируется согласно рис. 3.3(b) и оба седла подынтегрального выражения в (3.25) вносят вклад в интеграл.

Соответствие точных и квазиклассических решений Нам нужно убедиться, что область применимости квазиклассического разложения и точного решения имеет ненулевое пересечение. Обоснованность квазиклассического разложения (3.24) равна $s \gg 1 \;\Rightarrow$

$$|z - z_+| \gg (a\hbar^2/\varepsilon^2)^{1/3}. \tag{3.27}$$

С другой стороны, применимость разложения Тейлора потенциального профиля равна $|z-z_+| \ll a$. Уравнение сосуществования последних двух условий — малость параметра $\varepsilon a/\hbar$, который и есть главный параметр квазиклассического разложения задачи (Уравнение 3.7).

Мы видим, что решение слева от барьера разделено на две волны и идеально совпадает с квазиклассическими выражениями (3.24) в той же области. Таким образом, мы заменяем обе волны в (3.26) квазиклассическими волнами (3.21):

$$\theta_<(z) = \theta_+(z)\Big|_{z_+} - i\theta_-(z)\Big|_{z_+}. \tag{3.28}$$

В последнем уравнении мы возвращаемся от s к z. Интеграл, определяющий показатель в функциях $\theta_\pm$ в (3.21), предполагает, что нижний предел интегрирования изменен с x_0 на z_+.

Наконец, мы проводим аналитическое продолжение волновой функции (3.28) на вещественную ось $z \to x$. Структура уравнения становится особенно прозрачной с помощью соотношения:

$$\theta_\pm(x)\Big|_{z_+} = e^{\pm i\int_{z_+}^{x_0}\pi(z)\,dz}\theta_\pm(x), \tag{3.29}$$

где $\theta_\pm$ определены в уравнении (3.21). Затем получаем коэффициент отражения:

$$R = e^{-\frac{4}{\hbar v_F}\mathrm{Im}\int_{x_0}^{z_+}\frac{\sqrt{\varepsilon^2(\varphi^2+1)-\mu^2}}{\varphi^2+1}\,dz}, \tag{3.30}$$

где мы восстановили скорость Ферми v_F для удобства. Коэффициент отражения (3.30) является первым основным результатом данной главы. Он имеет типичный квазиклассический вид. Показатель экспоненциальной функции можно оценить как $\#\varepsilon a/\hbar \gg 1$, что делает коэффициент отражения экспоненциально малым.

Несмотря на свою простоту, результат (3.30) имеет некоторую особенность. А именно, совершенно не очевидно, как сделать переход от произвольного $\mu < \varepsilon$ к $\mu \to 0$ (исчезающему внешнему магнитному полю) в формуле (3.30). Дело в том, что при исчезновении μ симметрия TR задачи восстанавливается, и коэффициент отражения должен точно исчезнуть. Модификация результата (3.30), отражающая эту фундаментальную симметрию нашей задачи, будет, безусловно, самой нетривиальной частью данной главы, которая будет обсуждаться в разделе после изучения борновского приближения.

3.2.6 Потенциал с полюсом

Точное решение в окрестности точки поворота Квазиклассическая картина антистоксовых линий представлена в Приложении C.4 Детали аналитического продолжения квазиклассических волновых функций (3.11) в окрестности простого полюса z_p вдоль антистоксовых линий приведены в Приложении C.4. Получаем следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} \psi_{1+,\gtrless}(\zeta) &= \frac{\varepsilon+\mu}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon-\mu}{2}}\left(\frac{\zeta}{a}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varepsilon+\mu}{2a}\zeta^2+\frac{3\pi i}{4}} \\ \psi_{1-,\gtrless}(\zeta) &= \sqrt{2(\varepsilon-\mu)}\left(\frac{\zeta}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\varepsilon-\mu}{2a}\zeta^2+\frac{i\pi}{4}}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

где, как и прежде, символ $>$ $(<)$ соответствует квазиклассическому решению на правой (левой) антистоксовой линии в окрестности точки поворота z_p. Соотношения (3.31) записаны в квазиклассическом пределе $\zeta \gg \sqrt{|a|/\varepsilon}$.

Теперь нам нужно получить точное решение уравнения Дирака (3.6) в окрестности точки поворота z_p. Однако разложение уравнения (3.4) в z_p довольно громоздко, и мы отсылаем читателя к Приложению C.3.1. К счастью, грамотная замена $\psi_1(\zeta) = \exp(\zeta^2/2a[\varepsilon-\mu])\sqrt{\zeta}\psi(\zeta)$ приводит к исчезновению (!) члена без производной в (3.4), что приводит к гораздо более простому дифференциальному уравнению:

$$a\psi''\big[2\zeta^2(\mu+\varepsilon)-a\big]+\psi'\big[4\zeta^3\varepsilon(\mu+\varepsilon)-2a\zeta(2\mu+3\varepsilon)\big]=0 \tag{3.32}$$

которое тривиально интегрируется в квадратуры:

$$\begin{aligned} \psi_1(\zeta) = &\sqrt{\frac{\zeta}{a}}\left(c_1 - c_2\frac{\sqrt{\pi}\mu}{2\varepsilon^{3/2}\sqrt{a}}\mathrm{erf}\Big[\sqrt{\varepsilon a}\frac{\zeta}{a}\Big]\right) e^{\frac{\varepsilon-\mu}{2a}\zeta^2} \\ &+ c_2\frac{\varepsilon+\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\zeta}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon+\mu}{2a}\zeta^2} \end{aligned} \tag{3.33}$$

где erf — это функция ошибок, $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$. Теперь у нас есть все ингредиенты для соответствия точному решению (3.33) с квазиклассическими волновыми функциями (3.31).

Соответствие квазиклассического и точного решения Чтобы получить коэффициент отражения, мы требуем, чтобы на правой антистоксовой линии была только прошедшая квазиклассическая волна, то есть асимптотика решения (3.33) совпадает с функцией $\psi_{1+,>}$ в (3.31). Это немедленно дает условие (см. Приложение C.3.2 для асимптотики функции erf):

$$c_1 = \frac{\sqrt{\pi}\mu}{2\varepsilon^{3/2}\sqrt{a}}c_2, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon-\mu}{2}}e^{3\pi i/4}. \tag{3.34}$$

Выражение для c_2 следует из требования точного совпадения с $\psi_{1+,>}$ в (3.31). Таким образом, для решения на левой антистоксовой линии имеем:

$$\psi_1(\zeta)\Big|_{\text{left}} = \psi_{1+,<}(\zeta) + \frac{i\sqrt{\pi}\mu}{2\varepsilon^{3/2}\sqrt{a}}\psi_{1-,<}(\zeta). \tag{3.35}$$

Меняя квазиклассические выражения $\psi_{1\pm,<}$ на общие выражения (3.11), мы можем выполнить аналитическое продолжение с антистоксовой линии на действительную ось x. Заметив, что $\xi_{1,+} = \xi_{1,-}$ при $x \to -\infty$ в (3.11), получаем в полной аналогии с предыдущим выводом коэффициент отражения:

$$R{=}\frac{\pi\hbar v_F}{|a|}\frac{\mu^2}{4\varepsilon^3}e^{-\frac{4}{\hbar v_F}\mathrm{Im}\int_{x_0}^{z_p}\frac{\sqrt{\varepsilon^2-\mu^2+\varepsilon^2\varphi^2(z)}}{1+\varphi^2(z)}dz}, \tag{3.36}$$

где x_0, как и раньше, — произвольная точка вещественной оси. Здесь мы восстановили $\hbar$ и скорость Ферми. Результат (3.36) дополняет результат (3.30), полученный для регулярной функции деформации $\varphi(z)$. Мы видим, что эти два соотношения имеют одну и ту же квазиклассическую экспоненту, как и следовало ожидать от квазиклассического анализа. Разница между разными классами потенциалов выражена в предэкспоненциальном множителе. И здесь проявляется первая интересная особенность задачи.

Сравнивая коэффициенты отражения (3.30) и (3.36), мы видим, что в отличие от первого, второй явно соблюдает TR-симметрию ТИ. А именно, коэффициент отражения обращается в нуль в случае исчезновения магнитного поля $\mu \to 0$, когда восстанавливается TR-симметрия квазичастичных возбуждений ТИ.

3.3 Борновское приближение

Целью этой части работы является разрешение парадокса неисчезающего при нулевом магнитном поле коэффициента отражения, изложенного в предыдущем разделе. В качестве отправной точки нам необходимо проанализировать задачу рассеяния в пределе слабого магнитного поля $\mu \ll \varepsilon$, ограничившись первым борновским приближением.

TR-симметрия задачи дает нам здесь приятный подарок. Примечательно, что нам удалось найти точное решение уравнения Дирака (3.4) в отсутствие магнитного поля $\mu = 0$ для любого деформационного потенциала. Естественно, из-за TR-симметрии точное решение является безотражательным. Теперь мы увидим, как даже самое незначительное магнитное поле влияет на аналитическую структуру решения и приводит к ненулевому отражению в задаче.

Точное решение. Перепишем исходный гамильтониан в отсутствие магнитного поля:

$$H = v_F\sigma_y\hat{p} + \frac{\sigma_z}{2}(\varphi\hat{p} + \hat{p}\varphi) \tag{3.37}$$

Оказывается, можно придумать унитарное преобразование

$$\psi(x) = \exp[i\theta(x)\sigma_x]\tilde{\psi}(x), \quad \tan 2\theta(x) = \varphi^{-1}(x), \tag{3.38}$$

превращая гамильтониан (3.37) в гораздо более простую форму (см. Приложение C.4.1):

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(v\hat{p} + \hat{p}v)\sigma_z, \tag{3.39}$$

где $v(x) = v_F\sqrt{\varphi^2(x) + 1}$. Гамильтониан (3.39) имеет следующие точные собственные функции

$$\underset{\rightarrow}{\psi_\varepsilon}(x) = \frac{e^{i\varepsilon\tau(x)}}{\sqrt{v(x)}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \underset{\leftarrow}{\psi_\varepsilon}(x) = \frac{e^{-i\varepsilon\tau(x)}}{\sqrt{v(x)}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

$$\tau(x) = \int\limits_0^x \frac{dx'}{v(x')} \equiv \int\limits_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\varphi^2(x') + 1}}. \tag{3.41}$$

И ясно видно, что точное решение в (3.40), движущееся вперед, остается таковым на всей действительной оси, и мы имеем безотражательную ситуацию, ожидаемую из симметрии TR системы.

Теория возмущений по μ. Для построения теории возмущений нам понадобится функция Грина для преобразованного гамильтониана (3.39) (см. Приложение C.4.2):

$$G(\epsilon; x, x') = -\frac{i}{2}(1 + \text{sign}[\tau(x) - \tau(x')]\sigma_z)\frac{e^{i\epsilon|\tau(x) - \tau(x')|}}{\sqrt{v(x)v(x')}}, \tag{3.42}$$

где $\text{sign}\,(x)$ — знаковая функция. Затем рассмотрим возмущение, создаваемое магнитным полем; в исходном базисе это $V = \mu\sigma_z$. При унитарном преобразовании $\hat{U}$ это становится:

$$\tilde{V}(x) = \frac{\mu}{\varphi^2(x) + 1}\left[\varphi(x)\sigma_z - \sigma_y\right] \tag{3.43}$$

Тогда отраженная волна задается теорией возмущений:

$$\psi_{\text{ref}}(x) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\epsilon; x, x')\tilde{V}(x')\underset{\rightarrow}{\psi_\varepsilon}(x')\,dx' \tag{3.44}$$

Подставляя преобразованный рассеивающий потенциал (3.43), функцию Грина (3.42) в (3.44), мы получаем (после некоторой простой алгебры) отражённую волну в теории возмущений первого порядка:

$$\psi_{\text{ref}} = r\underset{\leftarrow}{\psi_\varepsilon}(x), \quad r = \mu\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\varepsilon\tau(x')}}{1 + \varphi^2(x')}dx' \tag{3.45}$$

где r — конечная амплитуда отражения в приближении Борна. Внимательный читатель сразу заметит, что интеграл, определяющий r, расходится. Следует понимать этот интеграл как взятый вдоль наклонных направлений $-\infty \to \infty e^{i\pi-\delta}$ и $\infty \to \infty e^{i\delta}$, где δ — произвольно малый положительный угол.

3.4 Соответствие борновского приближения с квазиклассическим

Раздел 3.3 был посвящен выводу амплитуды отражения в первом борновском приближении. Однако борновская амплитуда отражения (3.45) должна быть справедливой даже в квазиклассическом пределе при условии выполнения квазиклассического условия (3.7).

Как легко видеть, условие (3.7) подразумевает оценку борновской амплитуды (3.45) методом наискорейшего спуска. Поэтому мы ожидаем, что отражение, полученное интегрированием методом наискорейшего спуска в борновском приближении, и квазиклассические ответы должны совпадать. Следуя общей структуре нашего квазиклассического изложения, нам необходимо рассмотреть два существенно разных случая: случай потенциала регулярного профиля $\varphi(z)$ (раздел 3.2.5) и потенциал с полюсом (раздел 3.2.6).

3.4.1 Регулярный потенциал

Квазиклассический предел борновского приближения. Как и в разделе 3.2.5, функция $\varphi(z)$ предполагается целой функцией в комплексной плоскости. Поэтому функция $\tau(z)$ (уравнение 3.41) не имеет особенностей, кроме точек ветвления типа квадратного корня, где функция φ^2+1 имеет корни (которые в общей ситуации предполагаются первого порядка).

Метод наискорейшего спуска подразумевает деформацию контура в интеграле (3.45) вдоль путей наискорейшего спуска действительной части показательной функции: $\mathrm{Re}\, i\tau(z)$.

Поэтому нам необходимо знать структуру стационарных кривых функции $\tau(z)$, т. е. линий уровня $\mathrm{Re}[\tau(z)]$. Подробный анализ немного сложен, но открывает зрелище (Приложение C.5). Полученный контур дважды (!) обходит каждую из точек ветвления $\tau(z)$ по бесконечно малым окружностям. Глобальное размещение контура вдоль путей наискорейшего спуска охватывает бесконечное количество римановых листов $\tau(z)$. В результате ведущий вклад в интеграл дается суммой остатков подынтегрального выражения в (3.45), умноженной на $4\pi i$ (двойной обход).

$$\begin{aligned} r \underset{\varepsilon a\to\infty}{\longrightarrow} 4\pi i\mu \sum_{\text{all branch points}} \operatorname*{res}_{z_n} \frac{e^{2i\varepsilon\tau(z)}}{\varphi^2(z)+1} \\ \approx 2\pi a\mu e^{2i\varepsilon\tau(z_0)}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

где a определяется как характерная длина потенциала через разложение Тейлора

$$\varphi(z) = i + (z-z_0)/a. \tag{3.47}$$

См. все подробности размещения контура в Приложении C.5. В результате коэффициент отражения в приближении Борна в квазиклассическом пределе:

$$R \equiv |r|^2 = \frac{4\pi^2\mu^2|a|^2}{v_F^2\hbar^2} e^{-\frac{4\varepsilon}{\hbar v_F}\mathrm{Im}\int\limits_0^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{\varphi^2(z)+1}}}. \tag{3.48}$$

Борновское приближение из квазиклассического анализа. Сравнивая формулу для коэффициента отражения, представленную анализом П-Х (3.30), и ответ (3.48), полученный квазиклассическим пределом теории возмущений, сразу видно, что квазиклассический результат (3.30) никак не может соответствовать пертурбативному выражению (3.48). Это наглядно видно из того факта, что, в отличие от (3.48), выражение (3.30) имеет ненулевой предел при $\mu \to 0$.

Проблема в том, что тип квазиклассического анализа, предпринятый в разделе 3.2.5, перестает работать, когда $\mu \to 0$. Причина этого в том, что при $\mu \ll \varepsilon$ полюс квазиклассического импульса (3.10) при $\varphi = \pm i$ приближается к точкам ветвления p: $\varphi_\pm$ (см. уравнение 3.14).

Это означает, что точное решение вблизи точки поворота (3.25) не может быть продолжено в асимптотическую область (3.27), поскольку разложение Тейлора функции $\varphi(z)$ вблизи точки поворота перестает быть справедливым из-за наличия полюса $z_0 : \varphi = i$. Необходимую оценку легко сделать. При $\mu \ll \varepsilon$ расстояние $z_0 - z_\pm \ll a$, а $|z_0 - z_\pm| \sim \mu^2/\varepsilon^2 a$. Ключевое асимптотическое разложение (3.25) становится недействительным, если расстояние $s \sim 1$ в (3.25) (эквивалентно, $|z - z_\pm| \sim a^{1/3}/\varepsilon^{-2/3}$ имеет тот же порядок, что и $|z_0 - z_\pm|$. Это влечет за собой

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \sim \frac{1}{(a\varepsilon)^{1/3}}. \tag{3.49}$$

Следовательно, при $\mu \lesssim \varepsilon^{2/3}/a^{1/3}$ обычный метод П-Х перестает работать. Также изложена возможная модификация метода, когда точка ветвления и полюс начинают сливаться (для уравнения Шредингера) in [95]. Сначала мы обращаем внимание читателя на структуру пертурбативного результата (3.48). Он показывает, что основной вклад в амплитуду рассеяния дает квазиклассическое действие $S = \int_{x_0}^{z_0} \pi(x)\, dx$ (см. выражение для π в уравнении3.7 при $\mu = 0$), намекая на то, что надбарьерное рассеяние происходит в точке ветвления $\varphi = i$ (т. е. z_0). Фактически, как мы увидим, линии Стокса все еще выходят за пределы точек ветвления $z_\pm$, но сильно искажаются из-за присутствия полюса z_0.

Антистоксовы линии в точке ветвления p при $\mu \ll \varepsilon$ Мы реализуем шаг (ii) метода П-Х. Как и прежде, мы выбираем точку z_+. Однако на этот раз следует использовать разложение Лорана квазиклассического импульса (3.20) вблизи полюса z_0, а не разложение Тейлора вблизи точки ветвления z_+. Подставляя разложение (3.47), получаем:

$$\pi(\zeta) = \frac{a\varepsilon}{2i\zeta}\sqrt{\frac{2i\zeta}{a} - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}} + \ldots \to e^{-i\pi/4}\varepsilon\sqrt{\frac{a}{2\zeta}}. \tag{3.50}$$

Последний переход в (3.50) выполняется при предположении $|\zeta/a| \gg (\mu^2/\varepsilon^2)$. Тогда квазиклассическое действие и квазиклассическое условие становятся:

$$\int\limits_0^\zeta \pi(t)\, dt = e^{-i\pi/4}\varepsilon\sqrt{2a\zeta}, \quad |\zeta| \gg \frac{1}{|a|\varepsilon^2} \tag{3.51}$$

и условие для антистоксовой линии становится теперь

$$\operatorname{Re} i \int\limits_0^\zeta \pi(t)\,dt = 0 \;\Rightarrow\; \arg(a\zeta) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\; n \in \mathbb{Z}. \tag{3.52}$$

В непосредственной близости от точки ветвления z_+ (где справедливо разложение Тейлора квазиклассического импульса (3.22)) антистоксовы линии образуют триплет, растягивающийся под углами $2\pi/3$ друг от друга. С другой стороны, уравнение 3.52 говорит нам, что они сливаются в дублет, проходящий вдоль берегов разреза ветвления, определяя однозначную ветвь $\pi(\zeta)$. Наконец, мы ожидаем, что антистоксовы линии образуют дублет, состоящий из двух горизонтальных линий, когда они достаточно далеки от $z_0,\; z_\pm$. Эти общие соображения проиллюстрированы на рис. 3.4(a) для случая, когда параметр разложения a в (3.15) и в (3.47) является действительным (для конкретности).

Для конкретности в дальнейшем мы будем считать, что параметр a в разложении (3.47) является действительным. Для общей ситуации ненулевого $\arg a$ единственным отличием будет наклон всех графиков на необходимый угол.

Картина выглядит довольно необычно (и, в какой-то степени, даже маловероятно). Для иллюстрации его корректности приведем чертеж точных антистоксовых линий (как линии уровня рельефа $\operatorname{Re} i \int_{z_+}^{z} \pi(t)\,dt$ на рис. 3.4(b-c) для конкретной потенциальной функции $\varphi(z) = z\exp(-z^2/2)$.

Квазиклассические решения (3.11) теперь легко получить, взяв начальную точку $z = z_0 - ai\mu^2/(2\varepsilon^2)$ (см. Приложение C.7).

$$\psi_{+,\gtrless} = \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{ia\mu}\left(\frac{a}{2y}\right)^{\frac{ia\mu}{2}+\frac{1}{2}} e^{i\varepsilon\sqrt{2ay}\mp i\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi\mu a}{2}} \tag{3.53}$$

$$\psi_{+,<} = \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{ia\mu}\left(\frac{a}{2y}\right)^{\frac{ia\mu}{2}+\frac{1}{2}} e^{-i\varepsilon\sqrt{2ay}+\frac{3i\pi}{4}-\frac{\pi\mu a}{2}}. \tag{3.54}$$

Здесь индекс обозначения $\pm$ соответствует (3.11).

Точное решение вблизи точки ветвления p при $\mu \ll \varepsilon$ Раскрывая уравнение Дирака (3.6) вблизи z_0, получаем:

$$2i\zeta\psi_1'' + (3i - 2a\mu)\psi_1' + \varepsilon^2 a\psi_1 = 0. \tag{3.55}$$

Здесь предполагается, что параметр μa удовлетворяет условию $0 \le \mu a \lesssim 1$. Уравнение 3.55 является уравнением типа Бесселя. В принципе, можно посмотреть его аналитические свойства и структуру его асимптотики при разных аргументах. Однако, чтобы изучить аналитическое продолжение его решений, полезно представить его точное решение методом Лапласа (см. Приложение C.2)

$$\psi_1(\zeta) = -i\varepsilon\sqrt{\frac{\varepsilon a}{2\pi}}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{ia\mu} e^{\frac{\pi a\mu}{2}} \int\limits_C e^{\zeta\varepsilon s+\frac{\varepsilon a i}{2s}} s^{ia\mu-\frac{1}{2}}\,ds. \tag{3.56}$$

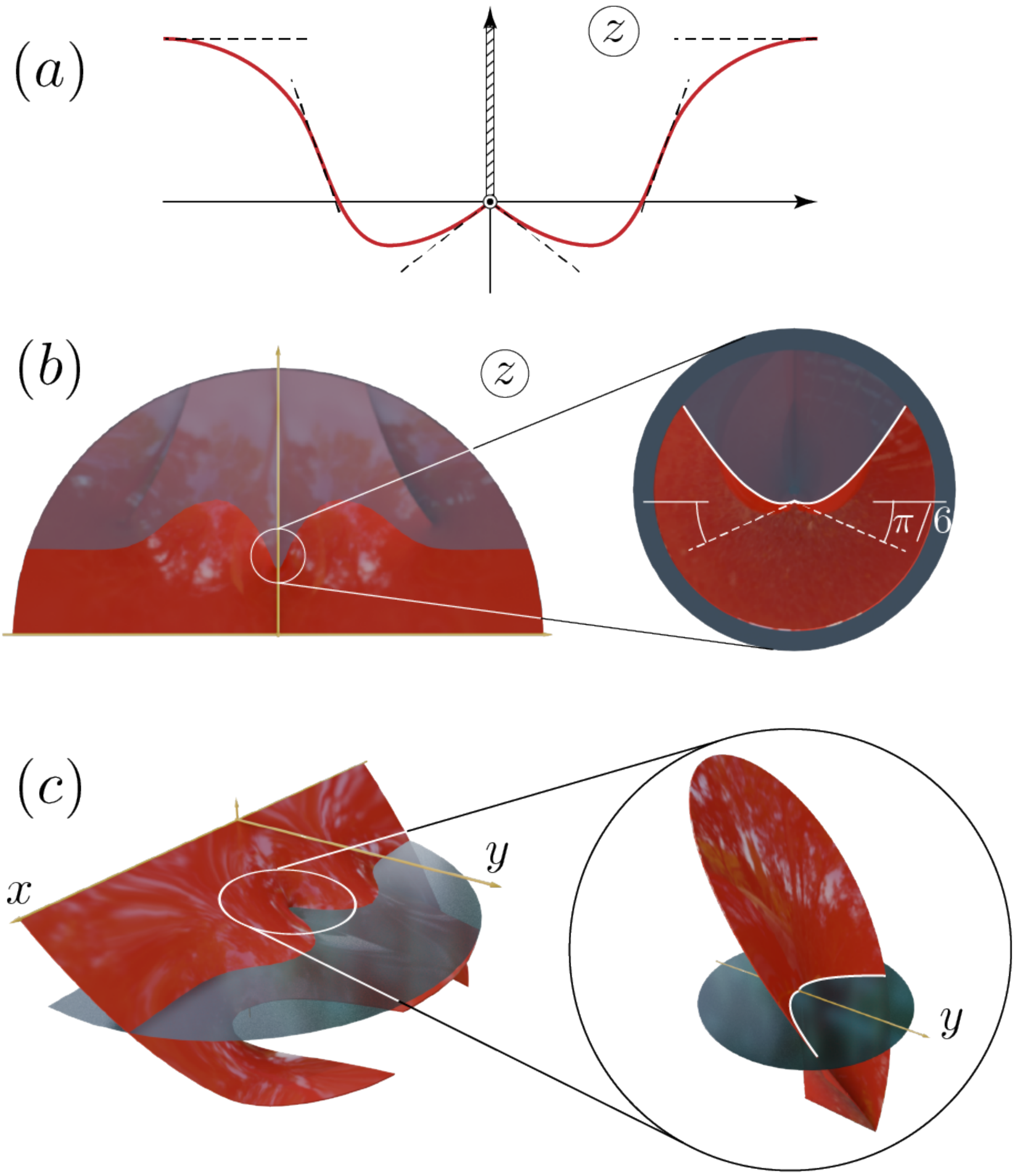

Рис. 3.4: (a) Структура антистоксовой линии из общих соображений. (b-c) Антистоксовы линии изображены как линии уровня функции $i\mathrm{Im}\int_0^\zeta \pi(t)dt$ с профильная функция $\varphi(z) = ze^{-z^2/2}$ для $\mu/\varepsilon = 0,15$.

Здесь константа перед интегралом настроена таким образом, что асимптотика $\psi(iy)$ в (3.56) на правой антистоксовой линии совпадает с соответствующим квазиклассическим решением (3.53).

Контур, дающий правильную асимптотику на правой антистоксовой линии $\zeta = iy$, представлен на рис. 3.5(a). Расположение контура продиктовано возможностью провести линию наискорейшего спуска экспоненциальной функции в (3.56):

$$f(s,\zeta) = \zeta s + \frac{ai}{2s} \tag{3.57}$$

через седловую точку $s_1 = \sqrt{a/2y}$ ($\zeta = iy$) функции $f(s,\zeta)$. Таким образом, точное решение (3.56) дает правильную главную экспоненту (см. квазиклассическое выражение (3.53)).

После вращения комплексного числа ζ справа на левую антистоксову линию по часовой стрелке контур C, определяющий точное решение (3.56), должен повернуться на тот же угол против часовой стрелки, чтобы гарантировать сходимость интеграла (см. рис. 3.5(b)). В то же время начальное направление контура ($s = 0$) должно быть направлено вниз (опять же, для сходимости интеграла). В результате контур C закручивается в спираль (см. рис. 3.5(c)) после того, как ζ достигает левой антистоксовой линии.

Для безупречной процедуры вычисления асимптотики контур интегрирования C должен быть проведен вдоль глобальных путей наискорейшего спуска $f(s, \zeta)$. Соответствующая деформация представлена на рис. 3.6(a-b). Как мы видим, правое седло s_1 вносит вклад дважды, в то время как контур интегрирования C проходит через него на разных римановых листах подынтегральной функции. Вклад от этого седла, таким образом, умножается на множитель $1 + e^{2\pi i(ia\mu-1/2)} \equiv e^{-\pi\mu a} 2\sinh\pi\mu a$. В результате (см. Приложение C.8 для простых деталей) асимптотику (3.56) на левой антистоксовой линии можно выразить через квазиклассические функции (3.53), (3.54) на той же линии следующим образом.

$$\psi(iy)\Big|_{\text{left}} = \psi_{+,<}(iy) - 2i\sinh\pi\mu a\psi_{-,<}(iy) \tag{3.58}$$

Уравнение 3.58 дает возможность сопоставить точное решение (3.56) в окрестности точки ветвления с квазиклассическими решениями во всей комплексной верхней полуплоскости, включая действительную ось.

Сопоставление квазиклассических и точных решений Продолжая шаг (v) метода П-Х, получаем при $x \to -\infty$:

$$\psi(x) = \xi_{1+} e^{i\int_{z_+}^{x} q_+ dz} - 2i\sinh\pi\mu a \xi_{1-} e^{i\int_{z_+}^{x} q_- dz} \tag{3.59}$$

Наконец, восстанавливая постоянную Планка и скорость Ферми и изменяя $a \to |a|$, получаем для коэффициента отражения:

$$R = 4\left|\sinh^2\frac{\pi\mu a}{\hbar v_F}\right| e^{-\frac{4}{\hbar v_F}\mathrm{Im}\int_{x_0}^{z_+}\frac{\sqrt{\varepsilon^2(\varphi^2+1)-\mu^2}}{\varphi^2+1}dz} \tag{3.60}$$

Коэффициент отражения (3.60) представляет собой обобщение результата (3.30) на случай $\mu a \sim 1$. Результат (3.60) прекрасно соответствует результату приближения Борна (3.48) в пределе $\mu a \to 0$. Уравнение (3.60) также разрешает парадокс неисчезающего при $\mu \to 0$ коэффициента отражения (3.30).

Результат (3.60) содержит поразительную особенность. Параметр a, определенный в уравнении 3.15, входящий в sinh - функцию в предэкспоненциальном множителе (3.60), в общем случае является комплексным. Это означает, что гиперболическая функция имеет гармонический вклад типа $\sin$: $|\sinh \pi\mu a|^2 = \sinh^2[\pi\mu \mathrm{Re}\, a]\cos^2[\pi\mu \mathrm{Im}\, a] + \cosh^2[\pi\mu \mathrm{Re}\, a]\sin^2[\pi\mu \mathrm{Im}\, a]$ коэффициент отражения (3.60) может демонстрировать квантовые осцилляции как функцию внешнего магнитного поля независимо от энергии падающей частицы. Это возможно благодаря тому, что формула (3.60) справедлива при $0 \le \mu a \lesssim 1$, как было отмечено после уравнения 3.55. Это влечет за собой выраженные квантовые флуктуации проводимости Ландауэра краевых состояний из-за независимости предэкспоненциального множителя от энергии квазичастицы.

Для существования указанных осцилляций профиль деформации должен быть слегка антисимметричным (таким образом, параметр a имеет мнимую часть, значительно большую действительной). Как показывает элементарное изучение функции $\sinh$, её немонотонное поведение наступает при $\mathrm{Im\, a/Re\, a} \gtrsim 2.64$. Период осцилляций определяется условием: $\Delta\mu \sim \hbar v_F/(\pi|a|)$. Амплитуда колебаний имеет порядок самого коэффициента отражения $\Delta R \sim R$.

Мы представляем коэффициент отражения (3.60) для модельного асимметричного потенциала на рис. 3.7.

3.4.2 Потенциал с полюсом

Теперь мы реализуем ту же программу для гораздо более простого случая потенциала с полюсом. Амплитуда отражения, полученная в (3.45),должна быть сопоставлена с амплитудой, полученной из квазиклассического приближения (3.36) в пределе $\varepsilon a/(\hbar v_{\mathrm{F}}) \gg 1$. Как и раньше, это соответствует взятию интеграла, входящего в (3.45) методом перевала:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\varepsilon\tau(x')}}{1+\varphi^2(x')}dx' \approx e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon a}}\frac{e^{2i\varepsilon\tau(z_p)}}{2\varepsilon} \tag{3.61}$$

где z_p: $\varphi(z_p) = \infty$ — седловая точка функции $\tau(z)$ (которая также является точкой поворота для квазиклассического импульса). Таким образом, мы получаем коэффициент отражения:

$$R = \frac{\pi\mu^2}{4|a|\varepsilon^3} e^{-4\varepsilon\, \mathrm{Im} \int_0^{z_0} \frac{dx}{\sqrt{1+\varphi^2(x)}}} \tag{3.62}$$

Этот результат совпадает с квазиклассическим коэффициентом отражения (3.36) в пределе $\mu \ll \varepsilon$. Это совпадение даёт дополнительное убедительное доказательство корректности квазиклассического результата (3.36)

Коэффициенты отражения (3.30) и (3.36), полученные в квазиклассическом приближении для двух широких классов деформаций общего типа, дополненные уточненным результатом (3.60), завершают наше исследование задачи рассеяния. Они являются основными результатами данной работы.

3.5 Обсуждение

В данной главе аналитически исследовано рассеяние квазичастиц на краевых дефектах двумерного ТИ в однородном магнитном поле. Использованы два взаимодополняющих подхода: метод Покровского-Халатникова и теория возмущений в магнитном поле. Получены коэффициенты отражения для двух наиболее важных классов деформационных потенциалов и продемонстрировано, что они совпадают в общей области применимости обоих методов. Исследование выявило нетривиальную взаимосвязь TR-симметрии и аналитических свойств амплитуды отражения.

Полученные результаты позволяют провести прямую экспериментальную проверку. Результаты теории возмущений, очевидно, справедливы для достаточно малого внешнего магнитного поля. Квазиклассический параметр $\lambda\!\!\!^{-}/a = \hbar v_F/(\varepsilon a)$ легко оценить из обычных экспериментальных данных. Для двумерного ТИ, полученного в квантовой яме HgTe с затвором, параметр расщепления Рашбы $\alpha \sim 10$ eVÅ, [103], скорость Ферми $v_F \approx 2$ eVÅ, [104], то есть, параметр Рашбы α примерно того же порядка, что и скорость Ферми $\alpha \sim v_R$. Таким образом, для типичного эксперимента размер краевого дефекта 1μm намного превышает длину волны квазичастицы $\lambda \sim 100$Å, [105], что и оправдывает использование квазиклассического приближения. Далее нам хотелось бы оценить магнитное поле, при котором могут наблюдаться квантовые осцилляции, предсказанные выражением для коэффициента отражения (3.60). g-фактор для винтовых краевых состояний в поперечном магнитном поле был измерен в [106]: $g \approx 50$. Следовательно, если снова принять типичный масштаб деформации $\sim 1\ \mu$m, необходимое магнитное поле составит $H \sim v_F\hbar/(g\mu_B a) \sim 0,07$ T.

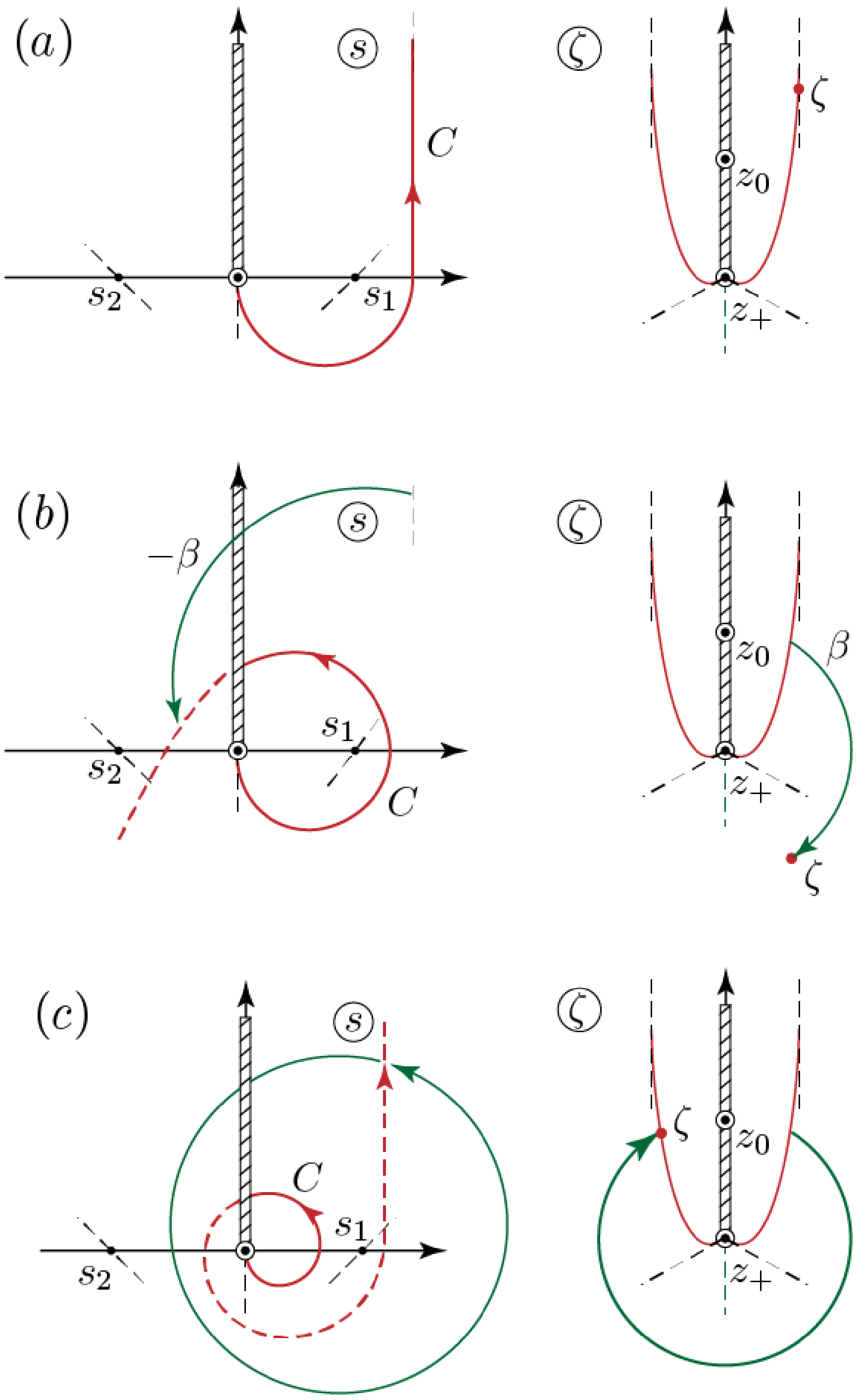

Рис. 3.5: (a) Справа: антистоксовы линии вблизи точки z_+. Точка ζ на правой антистоксовой линии такова, что волновая функция в этой точке представляет исходящую волну и должна соответствовать (3.53). Пунктирные линии — примерные направления антистоксовых линий. Слева: начальное расположение контура C для решения (3.56). s_1 и s_2 — седловые точки функции $f(s,\zeta)$ в (3.57). Пунктирные линии — линии наискорейшего спуска $f(s,\zeta)$. (b) Справа: Аргумент ζ находится на левой антистоксовой линии (повернут на 2π). Слева: Контур C деформирован в спираль.

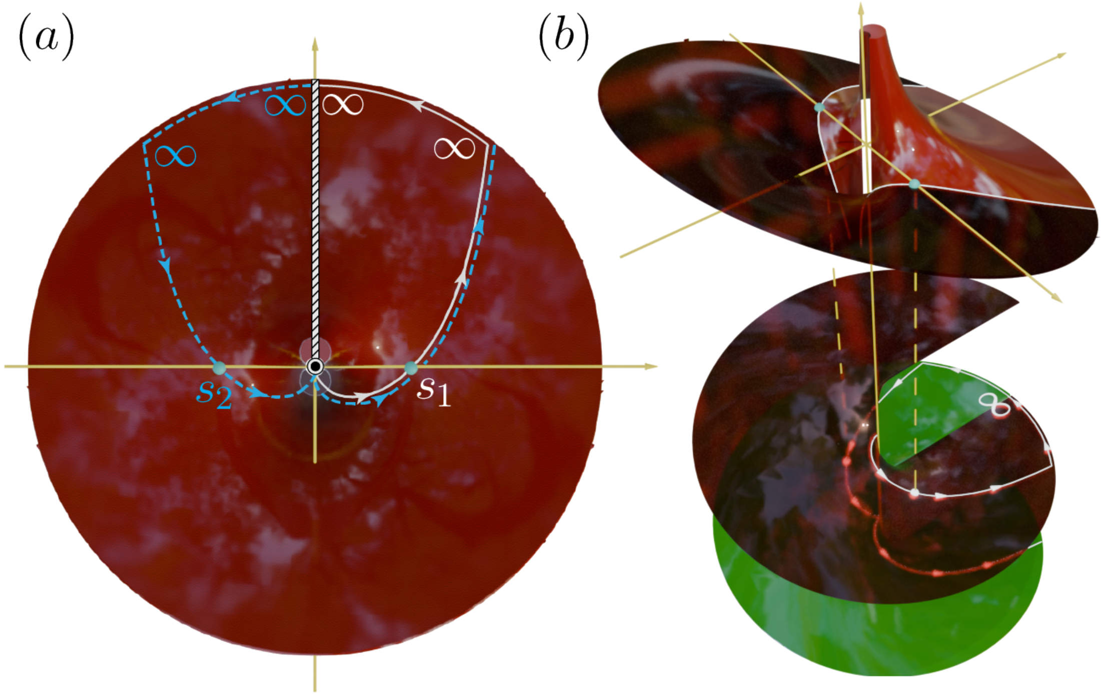

Рис. 3.6: (a) Контур наискорейшего спуска, дающий асимптотику точного решения (3.56) на левой антистоксовой линии. Голубой цвет означает размещение контура на другом римановом листе многозначной функции $s^{ia\mu-1/2}$ из подынтегральной функции (3.56). (b) Вверх: Размещение контура на рельефе функции $\mathrm{Re} f(s,\zeta)$. Вниз: Размещение контура на римановой поверхности функции $s^{ia\mu-1/2}$. Красный лист соответствует регулярной ветви $s^{ia\mu-1/2} \equiv \exp((ia\mu - 1/2)\ln|s|)$ для $s > 0$, а зеленый лист соответствует $s^{ia\mu-1/2} \equiv \exp([ia\mu - 1/2][\ln|s| + 2\pi i])$ для $s > 0$.

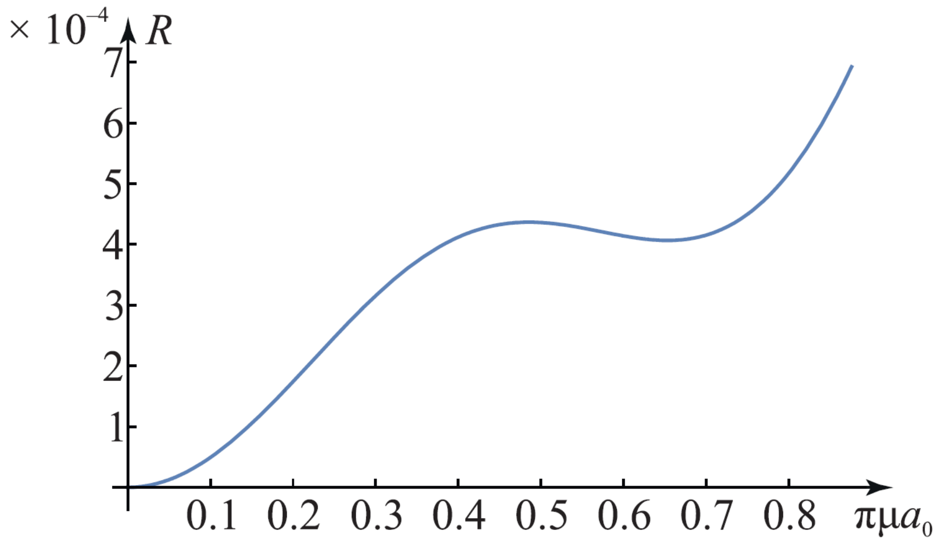

Рис. 3.7: Колебания коэффициента отражения (3.60), вычисленные для модельного потенциала $\varphi(z) = (z-8)e^{-z^2}$, как функции параметра магнитного поля $\pi\mu a_0$, где параметр $a_0 \equiv |a|_{\mu=0}$ (см. (3.15)).

Заключение

Основные результаты:

1. Получены непертурбативные решения действия Амбегаокара-Экерна-Шёна, описывающего одноэлектронный транзистор, с использованием техники Келдыша. Рассмотрен произвольный неравновесный режим и получена точная форма инстантонов. Вычислено значение действия на инстантонах. Доказано, что оно не зависит от функций распределения электронов, с условием, что они стационарны.

2. Изучено магнитосопротивление вейлевского полуметалла с аксиальной анизотропией. Продемонстрирована сильная зависимость магнитосопротивления от полярного и азимутального углов между осью анизотропии и плоскостью приложенного напряжения.

3. Изучено рассеяние квазичастиц на краевых дефектах двумерного топологического изолятора в однородном магнитном поле. Использованы два взаимодополняющих подхода: метод Покровского-Халатникова и теория возмущений в магнитном поле. Продемонстрировано совпадение результатов этих методов в общей области применимости. Получены коэффициенты отражения для двух наиболее важных классов деформационных потенциалов.

Благодарности

Я выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, Ярославу Игоревичу Родионову за большой труд, который он вложил в моё образование в области теоретической физики, за поддержку, внимание и терпение, проявленное им в ходе совместной научной работы; также благодарю М.П. Теленкова и С.И. Мухина за то, что порекомендовали мне Ярослава в качестве научного руководителя. Отдельно благодарю заведующего кафедрой ТФиКТ МИСИС, профессора Сергея Ивановича Мухина, за внимание и заботу, оказанные при решении административных вопросов. Благодарю профессора П.Д. Григорьева за рекомендацию меня в качестве участника научной группы в фонд развития теоретической физики и математики «Базис». Кроме того, выражаю благодарность Александру В. Рожкову, Вадиму С. Хапаю и Игорю С. Бурмистрову за ценную критику результатов научной работы.

Приложение А

Приложения к Главе 1

А.1 Поляризационный оператор для особого неравновесного случая

Здесь мы вычисляем компоненты поляризационного оператора для случая, в котором электроны на островке и на электродах имеют разные температуры. Электроны на точке и проводнике удовлетворяют распределению Ферми, преобразование Вигнера которого равно $F(\varepsilon) = \tanh(\varepsilon/2T)$. Подставляя его в выражения (1.9), получаем для запаздывающей (R) и опережающей (A) компонент (в частотном представлении и во временном представлении):

$$\Pi^{R,A}(\omega) = \mp\frac{i\omega}{\pi}, \qquad \Pi^{R,A}(t) = \int e^{-i\omega t}\Pi^{R,A}(\omega)\frac{d\omega}{2\pi} = \pm\frac{1}{\pi}\delta'(t). \tag{A.1}$$

Компонента Келдыша вычисляется сразу во временном представлении:

$$\begin{aligned}\Pi^K(t) &= 2i\sum_{\alpha=L,R}\frac{g_\alpha}{g}\int e^{-it\omega}\frac{d\omega}{2\pi}\int(1-\tanh\frac{\varepsilon}{2T_d}\tanh\frac{\varepsilon-\omega}{2T_\alpha})\frac{d\varepsilon}{2\pi}\\ &= 2i\sum_{\alpha=L,R}\frac{g_\alpha}{g}\int e^{-it\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{2\pi}\int e^{-it(\omega-\varepsilon)}\frac{d(\omega-\varepsilon)}{2\pi}(1-\operatorname{th}\frac{\varepsilon}{2T_d}\operatorname{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T_\alpha})\\ &= -i\sum_{\alpha=L,R}\frac{g_\alpha}{g}\mathrm{Re}\Big(\frac{T_\alpha}{\sinh(\pi T_\alpha t+i0)}\frac{T_d}{\sinh(\pi T_d t+i0)}\Big) = -\frac{i}{2}\Big(s_+(t)+s_-(t)\Big).\end{aligned} \tag{A.2}$$

Здесь введено обозначение:

$$s_\pm(t) \equiv \frac{g_R}{g}\frac{T_R}{\sinh(\pi T_R t\pm i0)}\frac{T_d}{\sinh(\pi T_d t\pm i0)} + \frac{g_L}{g}\frac{T_L}{\sinh(\pi T_L t\pm i0)}\frac{T_d}{\sinh(\pi T_d t\pm i0)}.$$

Производная дельта-функции представляется следующим образом: $2\pi\delta'(t) = 4\pi^2 i\big(s_+(t)-s_-(t)\big)$, так что

$$\Pi^R(t) = \frac{i}{2}\Big(s_+(t)-s_-(t)\Big). \tag{A.3}$$

Индексы для матричных элементов поляризационного оператора следующие: (1.9),

$$\hat{\Pi}\ :\ \begin{pmatrix}\Pi_{++} & \Pi_{+-}\\ \Pi_{-+} & \Pi_{--}\end{pmatrix}.$$

В результате элементы поляризационного оператора во временном представлении равны:

$$\Pi_{++} = -\frac{i}{2}\Big(s_+ + s_-\Big), \qquad \Pi_{+-} = is_-, \qquad \Pi_{-+} = is_+. \tag{A.4}$$

A.2 Обобщенное неравновесие

Здесь мы обсуждаем аналитические свойства оператора поляризации в общем случае, в котором F^d и $F^{R,L}$ — любые физически значимые стационарные функции распределения электронов. Запаздывающие и опережающие компоненты оператора поляризации (из уравнений (1.9)),

$$\Pi^{R,A}(\omega) = \mp i\frac{2\omega+\mu_0}{2\pi}, \qquad \mu_0 \equiv \sum_{\alpha=L,R}\frac{g_\alpha}{g}\int[F^d_\varepsilon - F^\alpha_\varepsilon]d\varepsilon. \tag{A.5}$$

Или, во временном представлении:

$$\Pi^{R,A}(t) = \pm\frac{1}{\pi}\delta'(t) \mp \frac{i\mu_0}{2\pi}\delta(t). \tag{A.6}$$

Здесь значение функционала μ_0 отражает асимметрию функций распределения; для распределений Ферми оно равно нулю.

Келдышевская компонента менее тривиальна. Для её вычисления представим неравновесные функции в виде $F_\varepsilon = \mathrm{sign}(\varepsilon/2) + \Delta F_\varepsilon$, где $\Delta F_\varepsilon \to 0\big|_{\varepsilon\to\pm\infty}$ — асимметричная часть функции распределения. Выведем общую формулу для келдышевской составляющей:

$$\Pi^K(\omega) = 2i\sum_{\alpha=L,R}\frac{g_\alpha}{g}\int[1-F^d_\varepsilon F^\alpha_{\varepsilon-\omega}]\frac{d\varepsilon}{2\pi} = 2i\int(1-\mathrm{sign}(\frac{\varepsilon}{2})\mathrm{sign}(\frac{\varepsilon-\omega}{2}))\frac{d\varepsilon}{2\pi}$$
$$-2i\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\sum_{\alpha=L,R}\frac{g_\alpha}{g}\big(\Delta F^d_\varepsilon\mathrm{sign}(\frac{\varepsilon-\omega}{2}) + \Delta F^\alpha_{\varepsilon-\omega}\mathrm{sign}(\frac{\varepsilon}{2})\big) - 2i\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\sum_{\alpha=L,R}\frac{g_\alpha}{g}\Delta F^d_\varepsilon\Delta F^\alpha_{\varepsilon-\omega}$$
$$\equiv I(\omega) + II(\omega) + III(\omega).$$

Во временном представлении интеграл I дает полюсы второго порядка в точках $t = \pm i0$:

$$2i\int\frac{d\omega}{2\pi}\int(1-\mathrm{sign}(\frac{\varepsilon}{2})\mathrm{sign}(\frac{\varepsilon-\omega}{2}))\frac{d\varepsilon}{2\pi}e^{-i\omega t} = \frac{i}{2\pi^2}\int d\omega|\omega|e^{-i\omega t} = -\frac{i}{2\pi^2(t+i0)^2} - \frac{i}{2\pi^2(t-i0)^2}.$$

Предполагается, что поправки ΔF_ε к функциям распределения убывают достаточно быстро, так что преобразования Фурье $II(\omega)$, $III(\omega)$ являются аналитическими функциями на действительной оси t. В соответствии с этим, матричные элементы интегрального оператора равны:

$$\Pi_{++} = \Pi_{--} = \Pi^K + \Pi^R + \Pi^A = \Pi^K,$$
$$\Pi_{+-}(t) = -\Pi^K(t) + \Pi^R(t) - \Pi^A(t) = \frac{i}{\pi^2}\frac{1}{(t-i0)^2} - \frac{i\mu_0}{\pi}\delta(t) - \Pi_{\mathrm{reg}}(t),$$
$$\Pi_{-+}(t) = -\Pi^K(t) - \Pi^R(t) + \Pi^A(t) = \frac{i}{\pi^2}\frac{1}{(t+i0)^2} + \frac{i\mu_0}{\pi}\delta(t) - \Pi_{\mathrm{reg}}(t).$$

Используя обозначение

$$p_\pm(t) \equiv \frac{i}{\pi^2}\frac{1}{(t\pm i0)^2} \pm \frac{i\mu_0}{\pi}\delta(t)$$

оператор $\hat{\Pi}$ можно выписать в удобной форме:

$$\hat{\Pi}(t) = \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{2}(p_+ + p_-) & p_- \\ p_+ & -\frac{1}{2}(p_+ + p_-) \end{array} \right)_t + \Pi^K_{\text{reg}}(t) \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right). \qquad \text{(A.7)}$$

Параметр μ_0 отвечает за наличие полюсов первого порядка в точках $t = \pm i0$. Для случая электронов, подчиняющихся распределению Ферми, как мы показали, имеются только полюса второго порядка при $t = \pm i0$. Полюс первого порядка, однако, не влияет ни на аналитическую структуру инстантонов, ни на седловое значение диссипативного действия. Левая сторона. уравнений (1.18) разделены на сингулярные части,

$$\frac{1}{2}\int (p_+ + p_-)_{(t,t')} \left(\frac{\chi_\pm(t)}{\chi_\pm(t')} - \frac{\chi_\pm(t')}{\chi_\pm(t)} \right) dt' + \int p_\pm(t,t') \frac{\chi_\pm(t)}{\chi_\mp(t')} dt' - \int p_\mp(t',t) \frac{\chi_\mp(t')}{\chi_\pm(t)},$$

и регулярные части,

$$\int \Pi_{\text{reg}}(t',t) \left(\frac{\chi_\pm(t)}{\chi_\pm(t')} - \frac{\chi_\pm(t)}{\chi_\mp(t')} \right) dt' + \int \Pi_{\text{reg}}(t,t') \left(\frac{\chi_\mp(t')}{\chi_\pm(t)} - \frac{\chi_\pm(t')}{\chi_\pm(t)} \right) dt'.$$

Если полевые функции $\chi_\pm$ удовлетворяют предположениям, сделанным в основном тексте, эти интегралы легко вычисляются и уравнения (1.18) сводятся к простым дифференциальным уравнениям (1.20).

Приложение B

Приложения к Главе 2

B.1 Вывод анизотропного гамильтониана

В повернутой системе координат, в которой ось z' выровнена вдоль оси анизотропии $\mathbf{n}_0$, мы имеем самоочевидное выражение для гамильтониана

$$H_0 = \int d\mathbf{r}' \psi'^{\dagger}(\mathbf{r}') h(p') \psi'(\mathbf{r}')$$
$$h'(p') = \left[v_{\perp}(\sigma_x p_{x'} + \sigma_y p_{y'}) + v_{\|} p_{z'}\right], \tag{B.1}$$

где $\psi'(\mathbf{r}')$ — спиноры в повернутом базисе. Мы хотим вернуться к *лабораторной* системе, в которой ось анизотропии z' $(\mathbf{n}_0)$ наклонена под углами Эйлера (Φ, Θ). Переход от лабораторной системы к наклонной достигается поворотом вокруг оси z на угол Φ и вокруг новой оси y на Θ. Это стандартная матрица Эйлера, связывающая векторы через $p = Rp'$, где

$$R = \begin{pmatrix} \cos\Theta\cos\Phi & -\sin\Phi & \sin\Theta\cos\Phi \\ \cos\Theta\sin\Phi & \cos\Phi & \sin\Theta\sin\Phi \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

Следовательно, преобразованный гамильтониан переписывается как $h(p') \equiv h(R^{-1}p)$. Нам также необходимо преобразовать спиноры в соответствии с двумерным представлением группы вращения: $\psi' = U\psi$, где унитарная матрица $U = U_y(\Theta)U_z(\Phi)$ является произведением унитарных матриц вращения $U_{\mathbf{n}}(\varphi) = \exp[i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\varphi/2]$ на угол Φ относительно z и на Θ относительно новой оси y

$$U = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\Phi}{2}}\cos\frac{\Theta}{2} & e^{-\frac{i\Phi}{2}}\sin\frac{\Theta}{2} \\ -e^{\frac{i\Phi}{2}}\sin\frac{\Theta}{2} & e^{-\frac{i\Phi}{2}}\cos\frac{\Theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{B.3}$$

Учитывая тот факт, что якобиан вращения равен единице ($d\mathbf{r}' = d\mathbf{r}$), видим, что преобразованный гамильтониан (B.1) становится

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d\mathbf{r}\psi^\dagger(\mathbf{r})h(p)U\psi(\mathbf{r}), \\ h(p) &= U^\dagger h(R^{-1}p)U. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Взяв выражение (B.1) для гамильтоновой 2×2 матрицы $h'(p')$ и выполняя прямую подстановку R из (B.2) и умножение на матрицы (B.3), приходим к выражению (2.1).

B.2 Преобразование тензора проводимости

Как было отмечено в разделе 2.1.3, преобразование, вызванное вращением тензора проводимости, достигается с помощью преобразования (2.11) с матрицей (B.2). Изменение масштаба координат $z = z'$, $(x, y) = \xi(x', y')$ приводит к преобразованию меры объема: $d\mathbf{r} = \xi^2 d\mathbf{r}'$. Мы требуем, чтобы число частиц было задано тем же выражением

$$N = \int \psi'^\dagger(\mathbf{r}')\psi'(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \tag{B.5}$$

как и до перемасштабирования. Следовательно, мы постулируем масштабирование ψ таким образом, что выражение (B.5) остается инвариантным

$$\int d\mathbf{r}\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \int \psi^\dagger(Rr')\psi(Rr')\xi^2 d\mathbf{r}', \tag{B.6}$$

что влечет за собой закон масштабирования ψ-оператора (2.9).

Чтобы понять, как преобразуется тензор проводимости при масштабировании, нам нужно записать преобразования для электрического поля и плотности тока. Закон преобразования электрического поля можно найти из требования, чтобы часть гамильтониана, отвечающая за связь с внешним электромагнитным полем, оставалась неизменной (так как само определение проводимости есть реакция тока на внешний потенциал).

Соответствующий потенциал, затронутый изменением масштаба, входит в поперечную часть канонического импульса и читается как

$$-i\Big(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\perp} - \frac{ie}{c}\mathbf{A}_\perp\Big) = -\frac{i}{\xi}\Big(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{s,\perp}} - i\frac{e}{c}\xi\mathbf{A}_\perp\Big). \tag{B.7}$$

Рассматривая (B.7), мы немедленно устанавливаем масштабное преобразование для векторного потенциала

$$\mathbf{A}_{s,\perp} = \xi\mathbf{A}_\perp, \quad \mathbf{A}_{s,\parallel} = \mathbf{A}_\parallel. \tag{B.8}$$

Используя определение $\mathbf{E} = -c^{-1}\partial_t\mathbf{A}$, $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, мы находим правила масштабирования преобразования для электрического и магнитного полей

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s,\perp} &= \xi\mathbf{E}_\perp, \quad \mathbf{E}_{s,\parallel} = \mathbf{E}_\parallel. \\ \mathbf{H}_{s,\perp} &= \xi\mathbf{H}_\perp, \quad \mathbf{H}_{s,\parallel} = \xi^2\mathbf{H}_\parallel. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Аналогично для электрического поля находим из (B.9):

$$E = SE_s,\ S \equiv \mathbf{diag}(\xi^{-1}, \xi^{-1}, 1). \tag{B.10}$$

Наконец, определяем закон преобразования плотности тока из его определения: $\mathbf{j} = n\mathbf{v}$. Вспоминая операторное определение плотности и используя (2.9), запишем $n_s = \psi_s^\dagger \psi_s = \xi^2 n$. Для плотности тока получаем

$$\mathbf{j}_{s,\perp} = \xi \mathbf{j}_\perp, \quad \mathbf{j}_{s,\parallel} = \xi^2 \mathbf{j}_\parallel \quad \Rightarrow \quad j = S_1 j_s, \quad S_1 = \mathbf{diag}(\xi^{-1}, \xi^{-1}, \xi^{-2}). \tag{B.11}$$

Теперь из определения тензора проводимости: $j_i = \sigma_{ik} E_k$ с помощью уравнений (B.9) и (B.11) определяем закон преобразования, связывающий начальную и масштабированную проводимости

$$S_1 j_s = \sigma S E_s\ \Rightarrow \sigma_s = S_1^{-1} \sigma S\ \Rightarrow \sigma = S_1 \sigma_s S^{-1}. \tag{B.12}$$

B.3 Аналитические выражения для диаграмм за пределами логарифмического приближения

Выражение для проводимости

В этом разделе параметры l_H и Ω^2 относятся к перемасштабированным величинам. Используя соотношения ортогональности для полиномов Эрмита, легко убедиться, что только нулевой и первый уровни Ландау дают неэкспоненциально подавленные выражения, соответствующие диаграммам (a)–(d), представленным на рис. 2.3

$$\begin{aligned} &(a): \quad \int \frac{dp_z}{2\pi} \mathrm{Im} G_{0,11}(p_z) G^R_{1,21}(p_z) G^R_{1,12}(p_z) \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathrm{Im} G^R_{0,11}(p_z + q_z) S_0(\mathbf{q}) g(\mathbf{q}), \\ &S_0(\mathbf{q}) = \int \frac{dp_y dx_1 dx_2 dx'}{2\pi} e^{iq_x(x_1 - x_2)} \chi_0^2(x_{p_y}) \chi_0^2(x'_{p_y}) \chi_1(x_{1,p_y}) \chi_0(x_{1,p_y+q_y}) \chi_0(x_{2,p_y+q_y}) \chi_1(x_{2,p_y}). \end{aligned} \tag{B.13}$$

Диаграммы на рис. 2.3(a) и 2.3(b) приводят к идентичным выражениям. Диаграммы на рис. 2.3(c) и 2.3(d) читаются следующим образом:

$$\begin{aligned} &(c): \quad \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathrm{Im} G_{0,11}(p_z) \mathrm{Im} G^R_{0,11}(p_z + q_z) G_{1,12}(p_z + q_z) G_{1,12}(p_z) S_1(\mathbf{q}) g(\mathbf{q}), \\ &S_1(\mathbf{q}) = \int \frac{dp_y dx_1 dx_2 dx'}{2\pi} \chi_0^2(x_{p_y}) \chi_0^2(x'_{p_y+q_y}) \chi_0(x_{1,p_y}) \chi_1(x_{1,p_y+q_y}) e^{iq_x(x_1 - x_2)} \chi_0(x_{2,p_y+q_y}) \chi_1(x_{2,p_y}). \end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned} &(d): \quad \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathrm{Im} G_{0,11}(p_z) \mathrm{Im} G^R_{0,11}(p_z + q_z) G_{1,21}(p_z + q_z) G_{1,21}(p_z) S_2(\mathbf{q}) g(\mathbf{q}), \\ &S_2(\mathbf{q}) = \int \frac{dp_y dx_1 dx_2 dx'}{2\pi} \chi_0^2(x'_{p_y}) \chi_0^2(x_{p_y+q_y}) \chi_0(x_{1,p_y}) \chi_1(x_{1,p_y+q_y}) e^{-iq_x(x_1 - x_2)} \chi_0(x_{2,p_y+q_y}) \chi_1(x_{2,p_y}). \end{aligned} \tag{B.15}$$

Выражения для форм-факторов $S_{0,1,2}(\mathbf{q})$ легко вычисляются с использованием соотношений для полиномов Эрмита. Имеем

$$S_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} e^{-q_\perp^2 l_H^2/2} q_\perp^2, \quad S_{1,2}(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} e^{-q_\perp^2 l_H^2/2 \pm 2i\varphi} q_\perp^2, \tag{B.16}$$

где $\mathbf{q}_\perp = (q_x, q_y)$, а φ — его направление в плоскости xy.

Мы также видим, что из-за наличия $\mathrm{Im}G_{0,11}(p_z) = -\pi\delta(v_\parallel p_z)$ и $\mathrm{Im}G_{0,11}(p_z+q_z)$ интегрирование по импульсам p_z и q_z тривиально, что приводит к эффективному $p_z = q_z = 0$. В результате выражения для диаграмм (a)–(d) упрощаются

$$(a+b+c+d) = \frac{1}{4\Omega^2}\frac{1}{4\pi}\int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} g(\mathbf{q}_\perp) e^{-q_\perp^2 l_H^2/2} q_\perp^2 \big(2 - e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\big). \tag{B.17}$$

Здесь $g(\mathbf{q}_\perp)$ — потенциальная корреляционная функция, взятая при импульсе $q_z = 0$. Используя уравнение (2.21), мы записываем

$$g(\mathbf{q}_\perp) = \frac{16\pi^2 n_{\mathrm{imp}} \xi^2 \alpha^2 v_\parallel^2}{\big(q_\perp^2[(\xi^2-1)\sin^2\gamma\cos^2(\varphi-\varphi_0)+1] + \xi^2\kappa^2\big)^2}. \tag{B.18}$$

Здесь φ_0 — азимутальный угол оси анизотропии. Мы видим, что этот угол фактически равен нулю в повернутом базисе координат, поскольку он принадлежит плоскости $x'z'$. Однако мы оставим его произвольным, поскольку он нам понадобится для вычисления компонента σ_{yy}.

Далее мы можем выполнить точное интегрирование по φ и интегрирование по $q_\perp$.

Чтобы выйти за рамки логарифмического приближения, нам нужно выполнить точное интегрирование по φ в (B.17). Мы используем следующие подходящие интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(\cos^2\varphi + a^2)^2} = \frac{\pi}{a^3}\frac{2a^2+1}{(a^2+1)^{3/2}}, \tag{B.19}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi\cos 2\varphi}{(\cos^2\varphi + a^2)^2} = -\frac{\pi}{a^3}\frac{1}{(a^2+1)^{3/2}}, \quad a^2 = \frac{q_\perp^2 + \xi^2\kappa^2}{q_\perp^2(\xi^2-1)\sin^2\gamma}. \tag{B.20}$$

Тогда для (B.17)

$$\begin{gathered}(a+b+c+d) = \\ \frac{n_{\mathrm{imp}}\xi^2\alpha^2}{\Omega^2(1+(\xi^2-1)\sin^2\gamma)^{3/2}} \int_0^\infty q_\perp^3 dq_\perp e^{-q_\perp^2 l_H^2/2} \frac{q_\perp^2\big[1+(\xi^2-1)\sin^2\gamma\cos^2\varphi_0\big] + \xi^2\kappa^2}{(q_\perp^2+\kappa^2\xi^2)^{3/2}\big(q_\perp^2 + \frac{\kappa^2\xi^2}{1+(\xi^2-1)\sin^2\gamma}\big)^{3/2}}.\end{gathered} \tag{B.21}$$

Введем новую переменную интегрирования: $q_\perp^2 = q_0^2 s,\ q_0^2 = \frac{\xi^2\kappa^2}{1+(\xi^2-1)\sin^2\gamma}$. Используя соотношение $\kappa^2 l_H^2 = 2\alpha/(\pi\xi^2)$ (в показательной функции) и удобное соотношение $1+(\xi^2-1)\sin^2\gamma = \xi^2/\eta^2$, приходим к следующему безразмерному и удобному для анализа интегралу.

$$(a+b+c+d) = \frac{n_{\mathrm{imp}}\eta^3\alpha^2}{2\xi\Omega^2} I(\varphi_0), \tag{B.22}$$

$$I(\varphi_0) = \int_0^\infty \frac{s[1+(\xi^2-1)\sin^2\gamma\cos^2\varphi_0] + \xi^2/\eta^2}{(s+1)^{3/2}(s+\xi^2/\eta^2)^{3/2}} s e^{-\alpha\eta^2 s/(\pi\xi^2)}\, ds. \tag{B.23}$$

Интеграл в (B.22) можно вычислить для любого значения φ_0. Однако он нам понадобится только для двух значений: $\varphi = 0$ (для $\sigma'_{s,xx}$) и для $\varphi = \pi/2$ (для $\sigma'_{s,yy}$). Для краткости обозначим

$a = \xi/\eta \geq 1$. Мы собираемся оценить их за пределами логарифмической точности, используя тот факт, что $\alpha \ll 1$

$$I(0) = a^2 \int\limits_0^\infty \frac{s}{(s+1)^{1/2}(s+a^2)^{3/2}} e^{-\alpha\eta^2 s/(\pi\xi^2)}\, ds, \tag{B.24}$$

$$I\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \int\limits_0^\infty \frac{s}{(s+1)^{3/2}(s+a^2)^{1/2}} e^{-\alpha\eta^2 s/(\pi\xi^2)}\, ds. \tag{B.25}$$

Для проводимости у нас есть следующее подходящее выражение

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{a^2}\sigma'_{s,xx}\cos^2\Phi + \sigma'_{s,yy}\sin^2\Phi = \frac{\alpha^3 v_\parallel^3}{2\pi}\frac{n_{\mathrm{imp}}\eta^3}{\xi\Omega^2}\Big[\frac{1}{a^2}I(0)\cos^2\Phi + I\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\sin^2\Phi\Big)\Big]. \tag{B.26}$$

B.3.1 Вычисление интегралов

В этом случае оба интеграла, входящие в (B.24), можно представить следующим разложением по α: $\ln\frac{1}{\alpha} + \mathrm{const} + \mathcal{O}(\alpha)$. Интеграл накапливает свое значение на промежутке $s \lesssim \alpha^{-1}$. Это означает, что импульс равен $q \lesssim l_H^{-1}$. Нас не интересуют члены $\mathcal{O}(\alpha)$. Однако мы извлечём члены const из обоих интегралов, поскольку они несут информацию о Φ – зависимости проводимости. Оба интеграла можно представить как

$$I(0) = a^2\big[J - a^2 I_0(\alpha)\big], \quad I\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = J - I_{\pi/2}(\alpha), \quad J = \int\limits_0^\infty \frac{1}{(s+1)^{1/2}(s+a^2)^{1/2}} e^{-\alpha\eta^2 s/(\pi\xi^2)}\, ds,$$

$$I_0(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{(s+1)^{1/2}(s+a^2)^{3/2}} e^{-\alpha\eta^2 s/(\pi\xi^2)}\, ds, \quad I_{\pi/2}(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{(s+1)^{3/2}(s+a^2)^{1/2}} e^{-\alpha\eta^2 s/(\pi\xi^2)}\, ds.$$

Оба интеграла $I_0(\alpha)$ и $I_{\pi/2}(\alpha)$ имеют регулярные пределы в $\alpha \to 0$. Поскольку нас не интересуют члены $\mathcal{O}(\alpha)$, мы можем положить в них $\alpha = 0$. Мы немедленно получаем

$$I_0(0) = \frac{2}{a(a+1)}, \quad I_{\pi/2}(0) = \frac{2}{(a+1)}. \tag{B.27}$$

Удобно преобразовать интеграл J как

$$J \equiv \int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{(s+1)^{1/2}(s+a^2)^{1/2}} - \frac{1}{s+1}\Big) e^{-\alpha\eta^2 s/(\pi\xi^2)}\, ds + \int\limits_0^\infty \frac{1}{s+1} e^{-\alpha\eta^2 s/(\pi\xi^2)}\, ds. \tag{B.28}$$

Первый член в (B.28) является сходящимся, и мы полагаем $\alpha = 0$. Это дает $\ln(4(a+1)^{-2})$. Второй интеграл легко вычисляется с помощью интегрирования по частям. Получаем

$$J = \ln\frac{4\pi\xi^2}{(a+1)^2\alpha\eta^2 e^C} + \mathcal{O}(\alpha), \tag{B.29}$$

где C — константа Эйлера–Маскерони.

Наконец, займемся тензором проводимости. Используя выражение (2.18) из основного текста диссертации и изменяя масштабированную $\Omega^2 - \to \Omega^2\xi\eta$, запишем

$$\sigma_{xx} = \frac{\alpha^3 v_\parallel^3}{2\pi}\frac{n_{\mathrm{imp}}\eta^2}{\xi^2\Omega^2}\Big[(J - a^2 I_0(0))\cos^2\Phi + (J - I_{\pi/2}(0)\sin^2\Phi)\Big]. \tag{B.30}$$

Подставляя (B.27) в (B.30), получаем выражение (2.27) для проводимости.

Приложение C

Приложения к Главе 3

C.1 Квазиклассическое уравнение

C.1.1 Вывод основных квазиклассических экспоненциального и предэкспоненциального членов

Мы подставляем (3.8) в основное дифференциальное уравнение (3.6) и выполняем формальное разложение по степеням $\hbar$. Пренебрежение членами порядка $\hbar$ (квазиклассическое разложение нулевого порядка) приводит к следующему квадратному уравнению относительно $S_0'(x)$:

$$4(\varepsilon+\mu)[(1+\varphi^2)(S_0')^2+2\mu\varphi S_0'] = 4(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^2-\mu^2) \tag{C.1}$$

решение которого записано в основном тексте (3.10). Далее, сохраняя следующие члены (порядка $\hbar$), получаем линейное уравнение на $S_1(x)$:

$$S_{1,\pm} = i\int\left(\mp\frac{\varepsilon}{2p}+\frac{\varphi\varepsilon^2}{p^2}+\frac{\mu q_\pm}{2p^2}\right)d\varphi, \tag{C.2}$$

где p определено в уравнении 3.10. Интегрирование дает $S_1(x) = -i\ln(\xi_1)$, ξ_1 записано в основном тексте (3.11).

C.1.2 Справедливость квазиклассического разложения вблизи точки ветвления p.

Справедливость квазиклассического подхода проверяется следующим образом [107]. Нам нужно убедиться, что поправка первого порядка (по $\hbar$) к левой части (C.1) намного меньше выражения нулевого порядка.

Тогда первый порядок по $\hbar$ члене выглядит так:

$$\text{l.h.s. of (C.1)}\Big|_{1^{\text{st}}\text{ order in }\hbar} = -4i(\varepsilon+\mu)\hbar\varphi'\,\frac{p[\varepsilon(\varphi^2+1)-\mu]+2\varepsilon^2\varphi(\varphi^2+1)-\mu^2\varphi}{p(\varphi^2+1)} \tag{C.3}$$

Теперь разложим импульс p вблизи точки ветвления $p = 0$, используя разложение поля φ: $\varphi(z) = i\sqrt{1-(\mu/\varepsilon)^2} + i\delta z/a$. С самого начала мы видим, что, в отличие от знаменателя, числитель (C.3) не исчезает при $p \to 0$. Это означает, что квазиклассическая поправка первого порядка расходится в точке ветвления $p = 0$. Подставляя $p = 0$ в числитель (C.3), сохраняя его конечным в знаменателе и устанавливая $\varphi^2 + 1 = (\mu/\varepsilon)^2$, получаем следующее:

$$\text{l.h.s. of (C.1)}\Big|_{1^{\text{st}} \text{ order in } \hbar} = 2^{3/2}\hbar(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^2-\mu^2)^{1/4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{a\delta z}} \tag{C.4}$$

Делив его на правую часть. (C.1) (и возводя его в квадрат для красоты) получаем условие применимости квазиклассического разложения вблизи точки ветвления p в основной части диссертации.

C.1.3 Соответствие между уравнениями Шредингера и Дирака

Цель этого параграфа — показать полную эквивалентность квазиклассических решений, следующих из уравнения Шредингера (3.17) и основного уравнения Дирака (3.6). Разложив $\pi^2(x)$ формально по степеням $\hbar$ и оставив только первое в $\hbar$ слагаемое, получим:

$$\pi(x) = \frac{1}{\hbar}\frac{p}{\varphi^2+1} - \frac{i}{2p}\frac{\varepsilon-\mu+\varepsilon\varphi^2}{(\varphi^2+1)}\varphi' + \ldots \tag{C.5}$$

Далее запишем квазиклассическое решение стандартным способом:

$$\theta_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(x)}}\exp\left(\pm i\int^x \pi(x)\,dx\right) \tag{C.6}$$

Наконец, выполним интегрирование и выразим квазиклассическое действие двумя удобными способами:

$$\int^x \pi(x)\,dx = -\frac{i}{2}\ln\frac{(p+\varphi\varepsilon)q_+\sqrt{\varphi^2+1}}{\varepsilon^2-\mu^2} \equiv -\frac{i}{2}\ln\frac{\varepsilon^2-\mu^2}{(p-\varphi\varepsilon)q_-\sqrt{\varphi^2+1}} \tag{C.7}$$

Теперь мы делаем расширение функции $\eta(x)$ до первого в $\hbar$ члена:

$$\frac{\eta(x)}{2} = \frac{i}{\hbar}\frac{\mu\varphi}{\varphi^2+1} + \frac{3}{2}\frac{\varphi\varphi'}{\varphi^2+1} \tag{C.8}$$

и выполнить интегрирование (с учетом формулы (3.18)):

$$\int^x \frac{\eta(x)\,dx}{2} = \frac{i}{\hbar}\int\frac{\mu\varphi\,dx}{\varphi^2+1} + \frac{3}{4}\ln(\varphi^2+1) \tag{C.9}$$

Объединяем два варианта действия C.7, интеграл (C.9) и решение (C.6) и подключаем последнее в волновую функцию (3.18) получаем точное соответствие с квазиклассическими выражениями (3.10)-(3.11).

C.1.4 Разложение уравнения Шредингера вблизи точки ветвления

Вблизи точки ветвления $z_\pm$ имеем:

$$\eta(\zeta) = -\frac{2}{\hbar}\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-\mu^2}}{\mu} + ... \tag{C.10}$$

Теперь вопрос заключается в расширении $\pi^2(z)$ вблизи $z_\pm$. Он имеет следующий вид:

$$\pi^2(\zeta) = \underbrace{i\frac{(\varepsilon-\mu)\varepsilon^3}{\mu^3}\frac{1}{\hbar a}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{1}{\hbar^2}\frac{2i\zeta}{a}\frac{\epsilon^5\sqrt{\varepsilon^2-\mu^2}}{\mu^4}}_{\mathrm{II}} + ... \tag{C.11}$$

Интересно, что как только мы принимаем во внимание зависимость потенциала $\varphi(z)$ от z, потенциал перестает стремиться к нулю при $z = z_\pm$. Докажем, что это согласуется с нашим анализом, и этот член можно отбросить по сравнению со вторым. Нас интересуют оценки, поэтому мы подставляем $\varepsilon \sim \mu$ везде в наших рассуждениях. Предположим, что ζ выбрано таким образом, что первый член доминирует над вторым:

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \sim \frac{z\varepsilon}{\hbar} \ll 1 \tag{C.12}$$

Тогда для решения (3.17) в основном тексте имеем:

$$\theta(\zeta) \sim \exp\left(\#\sqrt{\frac{\varepsilon}{\hbar a}}\zeta\right). \tag{C.13}$$

Из показателя степени (C.13) заключаем, что характерный масштаб волновой функции равен $\sqrt{\hbar a/\varepsilon}$.

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{a\varepsilon}{\hbar}} \gg 1 \text{ (см. уравнение 3.7)} \tag{C.14}$$

Следовательно, в интересующей нас области (в масштабе предполагаемой квазиклассической длины волны) член I можно смело отбросить по сравнению с II.

Проверим, что сохранение только члена II в (C.11) согласуется с анализом. Если оставить только член II, то решение (3.17) в квазиклассическом режиме будет иметь вид:

$$\theta(\zeta) \propto \exp\left(i\int^\zeta \pi(\zeta)d\zeta\right) \sim \exp\left(\#\frac{\zeta^{3/2}}{\sqrt{a}}\frac{\varepsilon}{\hbar}\right). \tag{C.15}$$

В результате характерный масштаб волновой функции равен $(a\hbar^2/\varepsilon)^{1/3}$. Следовательно, для соотношения имеем:

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \left(\frac{a\varepsilon}{\hbar}\right)^{1/3} \gg 1 \tag{C.16}$$

И действительно, это совпадает с нашим первоначальным утверждением. Таким образом, член I в (C.11) можно безопасно отбросить, что делает вывод о справедливости квазиклассического уравнения (3.23) в основной части диссертации.

C.2 Аналитические свойства асимптотики функции Эйри

Для решения (3.23) мы используем метод Лапласа решения дифференциального уравнения с линейными коэффициентами [108]. Мы используем краткое изложение и обозначения из [107]. Чтобы найти точное решение уравнения вида:

$$\sum_{m=0}^{n}(a_m + b_m s)\frac{d^m\theta}{ds^m} = 0 \tag{C.17}$$

составляем полиномы:

$$P(t) = \sum_{m=0}^{n} a_m t^m, \quad Q(t) = \sum_{m=0}^{n} b_m t^m, \tag{C.18}$$

И определяем функцию:

$$Z(t) = \frac{1}{Q}\exp\int\frac{P}{Q}\,dt \tag{C.19}$$

определенную с точностью до мультипликативного множителя. Тогда точное решение (3.23) можно найти в терминах контурного интеграла:

$$\theta(s) = \int\limits_C e^{st}Z(t)\,dt \tag{C.20}$$

где контур C выбран таким образом, что функция

$$V = e^{st}QZ \tag{C.21}$$

принимает одинаковые значения на своих концах. Функция V управляет размещением контура интегрирования C в точном решении (C.20).

Для случая уравнения Эйри:

$$\theta''(s) + s\theta(s) = 0 \tag{C.22}$$

полиномы P и Q:

$$P = t^2, \quad Q = 1 \;\Rightarrow\; Z(t) = e^{\frac{t^3}{3}} \tag{C.23}$$

Объединяя (C.23) и (C.20), получаем интегральное представление

$$\theta(s) = \mathrm{const}\int\limits_C e^{st+\frac{t^3}{3}}\,dt \tag{C.24}$$

совпадающее с точностью до константы нормировки с (3.25). Функция V определяется как:

$$V(t,s) = e^{st+\frac{t^3}{3}} \tag{C.25}$$

Теперь нам нужно выбрать контур. Обычно, самые простые для определения точки, где V принимает одинаковые значения, — это точки, где V обращается в нуль. В случае такой простой функции, как (C.25), достаточно посмотреть на поведение показателя степени при больших t: $st + t^3/3 \underset{t\to\infty}{\to} t^3/3$. Мы видим, что при больших t V обращается в нуль, пока

$$\begin{aligned} &\cos(3\arg\, t) < 0,\ |t| \to \infty \Rightarrow \\ &\arg t \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}\right) \end{aligned} \tag{C.26}$$

Уравнение C.26 очерчивает целые области в комплексной плоскости t, где должен начинаться и заканчиваться контур C. Эти области закрашены серым цветом на рис. 3.3 в основной части. Они также представлены на рис. C.1 с пересекающейся горизонтальной плоскостью и обозначены I, II и III для $n = 1, 2,$ и 3 в уравнении C.26 соответственно. Важно отметить, что области (C.26) не зависят от аргументов комплексной переменной s.

C.2.1 Асимптотика при $s \to +\infty$

Нам нужно разместить контур таким образом, чтобы решение $\theta(s)$ имело правильную асимптотику при больших положительных значениях s. Это означает, что интеграл (C.24) должен быть вычислен методом наискорейшего спуска. Для этого нам нужно знать возможные стационарные точки показательной функции решения (C.24):

$$f(t) = st + \frac{t^3}{3} \tag{C.27}$$

Это седловые точки:

$$t_1 = i\sqrt{s}, \quad t_2 = -i\sqrt{s} \tag{C.28}$$

Вторые производные функции $f(t)$ в седловых точках:

$$f''(t_1) = 2i\sqrt{s}, \quad f''(t_2) = -2i\sqrt{s} \tag{C.29}$$

А направления наискорейшего спуска в седловых точках задаются следующим образом:

$$\arg\, t = \frac{\pi}{2} - \frac{\arg f''}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \tag{C.30}$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n \tag{C.31}$$

Значение $f(t)$ в t_1 дает основное экспоненциальное значение решения (C.24) в приближении седловой точки: $\theta \propto \exp(2is^{3/2}/3)$, что соответствует квазиклассической асимптотике исходящей волны $\theta_+^{\rm app}$ из (3.24). Поэтому контур C в (C.24) следует расположить таким образом, чтобы его можно было деформировать в траекторию наискорейшего спуска, проходящую через седловую точку t_1. Это размещение изображено на рис. C.1(a), а приближение седловой точки дает:

$$\theta(s) = \mathrm{const}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_1)|}}e^{f(t_1)+i\alpha_1} = \mathrm{const}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/4}}e^{\frac{2i}{3}s^{3/2}+\frac{i\pi}{4}} \tag{C.32}$$

Сравнивая асимптотику (C.32) и квазиклассическое выражение для θ_+^{app} в (3.24), мы легко фиксируем константу в перед интегралом:

$$\mathrm{const} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}\gamma^{1/6}}, \tag{C.33}$$

приходя к нормализованному решению (3.25).

C.2.2 Асимптотика при $s \to \infty e^{-2\pi i/3}$

После поворота аргумента s на $-2\pi/3$ для перехода к соответствующей антистоксовой линии топография рельефа $\mathrm{Re}\, f(t)$ меняется. Рельеф $\mathrm{Re} f(t)$ и его пути наискорейшего спуска при $s = |s|\exp(-2\pi i/3)$ представлены на рис. C.1(b). Как мы видим, теперь можно деформировать исходный контур C таким образом, чтобы он по-прежнему начинался в области II и заканчивался в области I, но при этом разделялся на два пути наискорейшего спуска C_1 и C_2, каждый из которых проходит через соответствующее седло. Направления наискорейшего спуска в седлах следуют из условия (C.30).

$$\alpha_1 = \frac{5\pi}{12}, \quad \alpha_1 = -\frac{\pi}{12} \tag{C.34}$$

И вклад от двух седел читается так:

$$\theta(s) = \mathrm{const}\frac{\sqrt{\pi}}{|s|^{1/4}}\left(e^{\frac{2i}{3}s^{3/2}+\frac{5\pi i}{12}} + e^{-\frac{2i}{3}s^{3/2}-\frac{\pi i}{12}}\right) \tag{C.35}$$

Асимптотика (C.35) вместе с (C.33) дает формула (3.26) в основной части диссертации.

C.3 Точное уравнение

C.3.1 Преобразование уравнения Дирака

Уравнение (3.6) в окрестности точки поворота z_p: $\varphi(z) \approx ia/(z - z_p)$ и в пределе $|\zeta| = |z - z_p| \ll |a|$ становится ($\hbar = 1$):

$$\begin{aligned} 4a\zeta\Big[a\zeta\psi_1''\left(2\zeta^2[\mu+\varepsilon] - a\right) + \psi_1'\big(a^2 + 4\mu\zeta^4[\mu+\varepsilon] - 2a\zeta^2[4\mu+3\varepsilon]\big)\Big] \\ + \psi_1\Big[-3a^3 + 2a^2(7\mu+9\varepsilon)\zeta^2 + 4a(\mu+\varepsilon)(3\varepsilon-5\mu)\zeta^4 - 8(\varepsilon-\mu)(\mu+\varepsilon)^2\zeta^6\Big] = 0 \end{aligned} \tag{C.36}$$

Удивительно, но уравнение C.36 можно решить в квадратурах для $\mu \neq 0$ и в элементарных функциях для $\mu = 0$. Сначала изучим его асимптотику при $\zeta \to \infty$ и $\zeta \to 0$. Сохраняя только самые высокие степени ζ в $\zeta \to \infty$, получаем следующее уравнение:

$$a^2\psi_1'' + 2\zeta\mu a\psi_1' - \zeta^2(\varepsilon^2 - \mu^2)\psi_1 = 0 \implies \psi_1 = e^{\frac{\zeta^2}{2a}(\varepsilon\pm\mu)}, \quad \zeta \to \infty \tag{C.37}$$

В $\zeta \to 0$ сохраняем самые низкие степени ζ, чтобы получить:

$$4u^2\psi_1'' - 4\zeta\psi_1' + 3\psi_1 = 0, \implies \psi_1 = \sqrt{\zeta} \tag{C.38}$$

Наконец, сделав замену $\psi_1 = e^{\frac{\zeta^2}{2a}(\varepsilon-\mu)}\sqrt{\zeta}\psi(\zeta)$, мы получаем гораздо более простое дифференциальное уравнение (3.32) в основной части.

C.3.2 Асимптотика функции erf

Функция $\mathrm{erf}\,(z)$ имеет линию Стокса на мнимой оси. Это означает, что ее асимптотика меняется, когда аргумент z пересекает направление $-\pi/2$. Исходя из самого определения функции erf, легко выводятся следующие асимптотики в окрестности направлений $-\pi/4$ и $-3\pi/4$:

$$\begin{aligned} \mathrm{erf}(\zeta)\Big|_{\zeta=|\zeta|e^{-i\pi/4}} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta} \\ \mathrm{erf}(\zeta)\Big|_{\zeta=|\zeta|e^{-3i\pi/4}} &= -1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta} \end{aligned} \tag{C.39}$$

Подставляя эти асимптотики в точное решение (3.33), мы немедленно получаем соотношения (3.34) и (3.35) в основной части.

C.4 Квазиклассические функции в окрестности точки поворота z_p

Сначала логично вычислить основные экспоненциальные множители (3.9), $S_\pm = \int_0^\zeta q_\pm(t)\,dt$. Здесь нас ждет сюрприз, обусловленный тонкостью работы с регулярной ветвью импульса p, входящей в определение $q_\pm$.

Чтобы понять поведение p, нам нужно проследить за поведением функции $\varphi^2(z)$. Она имеет полюс второго порядка при $z = z_p$:

$$\varphi^2(z) = -\frac{a^2}{(z - z_p)^2}, \quad z \to z_p. \tag{C.40}$$

Глядя на (C.40), мы видим, что есть две линии, исходящие из полюса, вдоль которых $\varphi^2(z)$ остается отрицательной и действительной. Это линии с направлениями $\arg a$ и $\arg a + \pi$, идущие вправо и влево соответственно (для конкретности мы предполагаем, что $|\arg a| < \pi/2$):

$$\zeta_{\text{right}} = |\zeta|\frac{a}{|a|} \qquad\qquad \zeta_{\text{left}} = -|\zeta|\frac{a}{|a|}, \tag{C.41}$$

$$\varphi(\zeta_{\text{right}}) = i|\varphi(\zeta_{\text{right}})| \quad \varphi(\zeta_{\text{left}}) = -i|\varphi(\zeta_{\text{left}})| \tag{C.42}$$

По самому определению этих линий они являются путями наискорейшего подъема функции $\mathrm{Re}\varphi^2$. $\mathrm{Re}\varphi^2(z)$ изменяется от $-\infty$ до 0 при $\mathrm{Re}z \to \pm\infty$. Чтобы сделать вещи более прозрачными, мы рисуем эти линии для функции Лоренца $\varphi(z) = (z^2+1)^{-1}$ на рис. C.2 (Они протекают ниже обоих разрезов ветвей, начинающихся в $z_\pm$).

Когда точка z движется от полюса z_p вправо по линии самого крутого подъема, она неизбежно попадает в точку ветвления p, z_+, которую затем следует обойти снизу. То же самое происходит, когда точка движется влево (попадает в точку z_-). Важность этих линий, таким образом, заключается в том факте, что квадрат импульса p^2 остается действительным и положительным справа от z_+ и отрицательным слева (и наоборот для z_-). Следовательно, правильная ветвь p меняет свой знак, когда x движется от $+\infty$ к $-\infty$.

Определение регулярной ветви p, представленное сразу после уравнения 3.10 в основном тексте, диктует ее значение, как только точка z_+ проходит справа налево вдоль нижней полуокружности:

$$p(\zeta_{\text{right}}) = -i|p| \equiv e^{-i\pi/2}\sqrt{\varepsilon^2|\varphi^2| - \varepsilon^2 + \mu^2} \tag{C.43}$$

Теперь мы разложим последнее уравнение по Тейлору в окрестности z_p, придерживаясь правой линии наискорейшего подъема:

$$p(\zeta_{\text{right}}) = e^{-i\pi/2}\left(\varepsilon|\varphi| - \frac{\varepsilon^2-\mu^2}{2\varepsilon|\varphi|}\right) + \ldots \tag{C.44}$$

$$q_+(\zeta_{\text{right}}) = e^{i\pi/2}\frac{\varepsilon+\mu}{|\varphi|} \tag{C.45}$$

Используя (C.45), мы готовы вычислить основной показательный множитель S_+:

$$S_+(\zeta_{\text{right}}) = e^{i\pi/2}\int_0^{\zeta_{\text{right}}} \frac{\varepsilon+\mu}{|\varphi|}d\zeta_{\text{right}}, \tag{C.46}$$

где предполагается, что интегрирование выполняется вдоль правой линии наискорейшего подъема. Далее мы меняем согласно (C.41):

$$|\varphi| = \frac{|a|}{|\zeta|} = \frac{a}{\zeta_{\text{right}}} \to \frac{a}{\zeta}. \tag{C.47}$$

Последнее равенство в (C.47) является аналитическим продолжением с правой линии наискорейшего подъема в ее окрестности. Получаем:

$$S_{+,>} = i\int_0^{\zeta} \zeta\frac{\varepsilon+\mu}{a}d\zeta = i(\varepsilon+\mu)\frac{\zeta^2}{2}. \tag{C.48}$$

Теперь нам нужно вычислить предэкспоненциальные множители $\xi_{1,\pm}$ (уравнение 3.11). Фактически, мы *почти* готовы извлечь правильную регулярную ветвь квадратного корня $\xi_{1,+}$.

Удивительно, но функция $p + \varphi\varepsilon$, входящая в числитель выражения под квадратным корнем $\xi_{1,+}$, никогда не обращается в нуль в комплексной плоскости. Мы предполагаем, что ее аргумент равен нулю в точке $x \to +\infty$. Легко убедиться, что по мере приближения к окрестности z_p вдоль правой линии наискорейшего подъема аргумент $p + \varphi\varepsilon$ становится равным $\pi/2$. Это также ясно видно из ур. C.44:

$$\varepsilon\varphi + p\Big|_{\text{right}} = e^{i\pi/2}\frac{\varepsilon^2 - \mu^2}{2\varepsilon|\varphi|} \tag{C.49}$$

Собирая (C.44), (C.45) и (C.49) получаем для $\xi_{1,+}$:

$$\xi_{1,+}\Big|_{\text{right}} = e^{3\pi i/4}\frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon - \mu}{2|\varphi|^3}} + \ldots \tag{C.50}$$

Проводя, как и прежде, аналитическое продолжение $\zeta_{\text{right}} = \zeta$ получаем:

$$\xi_{1+,>} = e^{3\pi i/4}\frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon - \mu}{2}}\left(\frac{a}{\zeta}\right)^{3/2} \tag{C.51}$$

Собирая (C.51) и (C.48) получаем соотношение для $\psi_{1+,>}$ в (3.31) в основном тексте.

Таким же образом получаем соотношение для S_- и остальной части ξ_1:

$$\begin{aligned} \xi_{1+,<}(x) &= e^{-3\pi i/4}\frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon - \mu}{2}\right]^{1/2}\frac{1}{|\varphi|^{3/2}}, \\ \xi_{1-,\gtrless}(x) &= e^{\pm i\pi/4}\left[\frac{2(\varepsilon - \mu)}{|\varphi|}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{C.52}$$

Выполнение аналитического продолжения в (C.52) получаем остальную часть асимптотической формулы (3.31).

C.4.1 Преобразование Гамильтониана

В отсутствие магнитного поля гамильтониан имеет вид:

$$H = v_F\sigma_y\hat{p} - \frac{\sigma_z}{2}(\varphi\hat{p} + \hat{p}\varphi), \quad \hat{p} = -i\partial_x, \quad \varphi = \varphi(x) \tag{C.53}$$

Введём следующее унитарное преобразование:

$$\hat{U}(x) = \exp(i\theta(x)\sigma_x) \tag{C.54}$$

где $\theta(x)$ является действительным для действительного x. Следующий шаг — применить это преобразование к H. Преобразованный гамильтониан $\tilde{H} = \hat{U}H\hat{U}^\dagger$ можно выразить как

$$\tilde{H} = v_F(\hat{U}\sigma_y\hat{U}^\dagger)(\hat{U}\hat{p}\hat{U}^\dagger) - \frac{1}{2}(\varphi\hat{U}\hat{p}\hat{U}^\dagger + \hat{U}\hat{p}\hat{U}^\dagger\varphi)(\hat{U}\hat{\sigma}_z\hat{U}^\dagger) \tag{C.55}$$

запишем преобразования отдельных членов:

$$\hat{U}\hat{p}\hat{U}^\dagger = \hat{p} - \theta'\sigma_x,$$
$$\hat{U}\sigma_y\hat{U}^\dagger = (\sigma_y \cos 2\theta - \sigma_z \sin 2\theta), \qquad \hat{U}\sigma_z\hat{U}^\dagger = (\sigma_z \cos 2\theta + \sigma_y \sin 2\theta)$$

Поэтому преобразованный гамильтониан равен:

$$\begin{aligned} H &= v_F(\sigma_y \cos 2\theta - \sigma_z \sin 2\theta)(\hat{p} - \theta'\sigma_x) - \frac{1}{2}(\varphi(\hat{p} - \theta'\sigma_x) + (\hat{p} - \theta'\sigma_x)\varphi)(\sigma_z \cos 2\theta + \sigma_y \sin 2\theta) \\ &= \sigma_y \Big[v_F \cos 2\theta \hat{p} + i v_F \theta' \sin 2\theta - \frac{1}{2}(\varphi\hat{p} + \hat{p}\varphi) \sin 2\theta - i\theta'\varphi \cos 2\theta \Big] \\ &\quad - \sigma_z \Big[v_F \sin 2\theta \hat{p} - i v_F \theta' \cos 2\theta + \frac{1}{2}(\varphi\hat{p} + \hat{p}\varphi) \cos 2\theta - i\theta'\varphi \sin 2\theta \Big] \end{aligned}$$

Наша цель здесь — найти такую функцию $\theta(x)$, что член, пропорциональный σ_y, равен нулю. С этой целью запишем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} & v_F \cos 2\theta \hat{p} + i v_F \theta' \sin 2\theta - \frac{1}{2}(\varphi\hat{p} + \hat{p}\varphi) \sin 2\theta - i\theta'\varphi \cos 2\theta \\ &= \frac{v_F}{2}(\cos 2\theta + \hat{p} \cos 2\theta) - \frac{1}{2}(\varphi \sin 2\theta \hat{p} + \hat{p}\varphi \sin 2\theta) \end{aligned}$$

Это выражение обращается в нуль, если $v_F \cos 2\theta = \varphi \sin 2\theta$. Теперь упростим член, пропорциональный $-\sigma_z$:

$$\begin{aligned} & v_F \sin 2\theta \hat{p} - i v_F \theta' \cos 2\theta + \frac{1}{2}(\varphi\hat{p} + \hat{p}\varphi) \cos 2\theta - i\theta'\varphi \sin 2\theta \\ &= \frac{v_F}{2}(\sin 2\theta \hat{p} + \hat{p} \sin 2\theta) + \frac{1}{2}(\varphi \cos 2\theta \hat{p} + \hat{p}\varphi \cos 2\theta) \end{aligned}$$

Следовательно, преобразованный гамильтониан равен

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2}(v\hat{p} + \hat{p}v)\sigma_z, \qquad v(x) = \sqrt{v_F^2 + \varphi^2(x)} \tag{C.56}$$

Выводя это выражение, мы потребовали:

$$\cos 2\theta = \frac{\varphi}{\sqrt{v_F^2 + \varphi^2}}, \quad \sin 2\theta = \frac{v_F}{\sqrt{v_F^2 + \varphi^2}} \tag{C.57}$$

C.4.2 Функция Грина

Для построения теории возмущений нам понадобится функция Грина системы. Определим запаздывающую функцию Грина как обратный оператор Шредингера, $\hat{G} = (\epsilon - \hat{H} + i0)^{-1}$. В базисе собственных функций она выражается как

$$G(\epsilon; x, x') = \sum_\alpha \frac{\psi_\alpha(x)\psi_\alpha^\dagger(x')}{\epsilon - \varepsilon_\alpha + i0} \tag{C.58}$$

Подставляя собственные функции (3.40) и используя разрешение единицы, мы получаем

$$G(\varepsilon; x, x') = \int \frac{d\varepsilon'}{2\pi} \frac{\varepsilon + \varepsilon'\sigma_z}{\sqrt{v(x)v(x')}} \frac{e^{i\varepsilon'(\tau(x) - \tau(x'))}}{(\varepsilon + i0)^2 - \varepsilon'^2} \tag{C.59}$$

Интегрируя последнее выражение с помощью теоремы о вычетах, получаем функцию Грина (C.4.2) в основном тексте.

C.5 Аналитические свойства $\tau(z)$

Мы собираемся доказать, что в общей ситуации существует стационарный путь $\mathrm{Re}\,\tau(z) = \mathrm{const}$, соединяющий вещественную ось и точку ветвления z_0 функции $\tau(z)$.

Прежде чем продолжить, сделаем следующее замечание. Стационарный путь функции комплексной переменной, вытекающий из определенной точки, имеет 3 возможных расположения: i) он образует замкнутый контур, возвращающийся в исходную точку. ii) он заканчивается в сингулярности функции (полюсе, существенной сингулярности) iii) он имеет угол в точке ветвления или в стационарной точке. В частности, он поворачивает на π и возвращается в исходную точку в случае точки ветвления второго порядка (квадратный корень).

Поведение функции $\varphi(z)$ при $z \to \infty$

Поскольку $\varphi(\pm\infty) = 0$, функция $\varphi(z)$ не может иметь полиномиальное поведение при $z \to \infty$. Следовательно, ее ряд Лорана в окрестности ∞ имеет бесконечное количество членов с положительными степенями z, а $z = \infty$ является существенной особенностью.

Согласно теореме Казорати-Вейерштрасса, функция $\varphi(z)$ может иметь любое предельное значение в зависимости от направления, в котором находится $z \to \infty$. Мы понимаем, что из-за непрерывности $\varphi(z)$ существует сектор (обозначенный штрихпунктирными линиями на рис. C.3), где $\varphi(\infty) = 0$. С другой стороны, мы всегда можем найти направление $\arg z > 0,\ |z| \to \infty$ такое, что предел направления $\varphi(|z|e^{i\arg z}) \to i\infty$ (пунктирная линия на рис. C.3).

О размещении разреза ветви

Далее давайте нарисуем разрез ветви функции $\tau(z)$, выходящий из точки z_0 вверх (от действительной оси) в направлении, где $\mathrm{Im}\,\varphi^2(z) = 0$. Это направление наискорейшего спуска $\mathrm{Re}\,\varphi^2(z)$ и в точности направление пунктирной линии на рис. C.3, обсуждавшейся ранее. Следовательно, $\varphi^2(z)+1$ является действительным и отрицательным, а квадратный корень $\sqrt{\varphi^2(z)+1}$ является чисто мнимым. Это влечет, в частности, что по обе стороны отреза ветви:

$$\tau(\infty \pm \delta) = \tau(z_0) \pm \frac{1}{i} \int\limits_{z_0}^{\infty\pm\delta} \frac{dx + idy}{\sqrt{|\varphi^2(z) - 1|}}. \tag{C.60}$$

где $\infty \pm \delta$ обозначает бесконечные точки ниже (выше) отреза ветви. Важно отметить, что направление отреза ветви выбрано таким образом, что $\varphi^2(z) \to \infty$. Следовательно, ветвь $z \to \infty$ лежит выше предельной сепаратрисы (см. рис. C.3). Читая формулу (C.60), мы отмечаем, что в общей ситуации

$$\frac{dy}{\sqrt{|\varphi^2(z) - 1|}} \neq 0. \tag{C.61}$$

Последнее выражение тогда влечёт:

$$\operatorname{Re}\tau(\infty \pm \delta) \neq \operatorname{Re}\tau(z_0) \tag{C.62}$$

Также важно отметить, что интеграл, входящий в (C.60), в принципе может быть сходящимся.

Стационарный путь $\operatorname{Re}\tau(z) = \operatorname{Re}\tau(z_0)$

Мы замечаем, что действительная ось является стационарным путем для $\operatorname{Im}\tau$: $\operatorname{Im}\tau = 0$. Следовательно, все стационарные пути $\operatorname{Re}\tau(z)$ исходят вертикально вверх и вниз от действительной оси. Сразу можно убедиться, что направление вверх является путем наискорейшего спуска для $\operatorname{Im}[\tau(z)]$. Как уже утверждалось ранее, функция $\varphi(z)$ должна иметь существенную особенность на бесконечности, следовательно, функция $\tau(z)$ также имеет существенную особенность в $z \to \infty$. Поскольку $\varphi(z)$ не имеет полюсов, функция $\tau(z)$ не имеет стационарных точек.

Это означает, что стационарные пути $\operatorname{Re}\tau(z)$, исходящие вверх от действительной оси, имеют только два варианта: они уходят в бесконечность, или они заканчиваются в точке ветвления второго порядка z_0 (и возвращаются обратно) в начальную точку на действительной оси.

Теперь мы собираемся доказать, что всегда существует точка на действительной оси со значением $\tau(x)$, равным действительной части $\tau(z_0)$ в точке ветвления. Действительно, правая вещественная полупрямая является линией наискорейшего подъема функции $\tau(z)$ (на самом деле, $\tau(\pm\infty) = \pm\infty$). Следовательно, она содержит все возможные значения $\operatorname{Re}[\tau(z)]$, которые может принимать в комплексной плоскости. Следовательно, на вещественной оси есть точка x_0, где $\tau(x_0) = \operatorname{Re}[\tau(z_0)]$. С другой стороны, если кривая наискорейшего спуска, исходящая из x_0, не входит в z_0, она должна уходить в бесконечность. Последнее означает, что точки с одинаковыми значениями $\operatorname{Re}\tau(\infty) = \operatorname{Re}\tau(z_0)$. Однако это невозможно из-за соотношения (C.62). Таким образом, мы утверждали, что всегда существует путь наискорейшего спуска, исходящий из некоторой точки x_0 на вещественной оси и заканчивающийся в точке z_0.

Другие стационарные пути

Как было отмечено в предыдущем абзаце, функция $\tau(z)$ имеет разные пределы при $z = \infty$ ниже и выше среза ветви: $\operatorname{Re}\tau_{\infty\downarrow}$, $\operatorname{Re}\tau_{\infty\uparrow}$. Находя точки на действительной оси с одинаковыми значениями τ (последние являются действительными), мы можем провести линии наискорейшего спуска.

C.6 О значении антистоксовых и стоксовых линий

Важность антистоксовых линий заключается в том, что это линии, вдоль которых оба линейно-независимые решения дифференциального уравнения не растут и не подавляются экспоненциально. Точное решение в нашем случае всегда представляется некоторым контурным интегралом $\psi(\zeta) \propto \int e^{\zeta f(t)} g(t)\, dt$, т. е. интегралом Эйри или Эрфа в предыдущих разделах или интегралом Бесселя (см. ниже). Асимптотика решения тогда задается путями наискорейшего спуска, проходящими через стационарную точку (или вокруг особых точек) $\mathrm{Re}\, f(t)$ в терминах асимптотического разложения вблизи последней точки.

При изменении аргумента ζ рельеф экспоненциальной функции $\mathrm{Re}\,[\zeta f(t)]$ деформируется. Деформация упомянутого рельефа изменяет путь наискорейшего спуска, принося в его окрестности дополнительные седла (или особенности) $f(t)$. Рассеянная волна появляется как дополнительный асимптотический ряд в новом седле (или особенности) на пути наискорейшего спуска.

Если ζ принадлежит антистоксовой линии, ни один из вкладов (дающих падающую и рассеянную волны) не доминирует экспоненциально. Как только мы отклоняемся от антистоксовой линии, дополнительный вклад, дающий рассеянную волну, становится экспоненциально подавленным по сравнению с ведущим вкладом. Однако главный вклад имеет неотъемлемую ошибку, встроенную в любой асимптотический ряд. Возникает вопрос: что, если ошибка ведущего асимптотического ряда на самом деле больше, чем экспоненциально малый вклад, дающий рассеянную волну?

К счастью, асимптотический анализ дает ответ на эту проблему. Утверждение следующее: ошибка в *оптимально суммированном* доминантном асимптотическом ряду всегда меньше, чем в субдоминантном ряду, за исключением так называемых линий Стокса (линий в комплексной плоскости, где ведущий вклад максимально доминирует над субдоминантным). Для выполнения оптимального суммирования асимптотического ряда необходимо деформировать контур интегрирования, представляющий решение вдоль *глобального* пути наискорейшего спуска функции $\mathrm{Re}\,\zeta f(t)$ [109].

C.7 Квазиклассические функции вблизи точки ветвления p в $\mu \ll \varepsilon$

Начнем с вычисления q_+. Подставляя расширение (3.47) в выражение (3.11) и сохраняя два ведущих члена, получаем:

$$q_\pm(\zeta) = \frac{-\mu i + \varepsilon\sqrt{\frac{2i\zeta}{a}}}{\frac{2i\zeta}{a}} + \dots \tag{C.63}$$

Далее интегрируем в направлении $\zeta = iy$ от точки z_+ вдоль правого берега разреза, начинающегося в точке z_+ (правая антистоксова линия, см. рис. C.4(a)). Относительная (по отношению к

z_0) координата z_+ находится через разложение Тейлора:

$$\varphi(z) = i + \frac{\zeta}{a} + ... = i\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}} = i - \frac{i\mu^2}{2\varepsilon^2} + ...$$
$$\Rightarrow \zeta \equiv \zeta_+ = -\frac{ia}{2}\frac{\mu^2}{\varepsilon^2} + ... \tag{C.64}$$

Теперь пришло время вычислить регулярную ветвь квадратного корня (которая есть не что иное, как импульс $p = \varepsilon\sqrt{2i\zeta/a}$), введя q_+ в (C.63). Как видно из рис. C.4(a) (зеленая пунктирная линия), аргумент p поворачивается на π, когда ζ перемещается от действительной оси к правой антистоксовой линии. Следовательно, $p = i|p|$ и квадратный корень в (C.63) расходуется как: $\sqrt{2i\zeta/a} \equiv \sqrt{-2y/a} = i\sqrt{2y/a}$. Следовательно, квазиклассическое действие имеет вид:

$$S_+ = -\frac{\mu a}{2}\int\limits_{\zeta_+}^{iy}\frac{d\zeta}{\zeta} + \varepsilon\int_0^y\sqrt{\frac{a}{2y}}\,dy \tag{C.65}$$

где мы изменили нижний предел интегрирования во втором интеграле с $y = -i\zeta_+$ на ноль, так как верхний предел интегрирования подчиняется условию $|y| \gg |\zeta_+|$ согласно (3.51). Однако это приближение нельзя сделать с первым интегралом, так как он становится логарифмически расходящимся в $\zeta \to 0$. Первый интеграл в (C.65) является логарифмическим, и нам нужно правильно отслеживать изменение аргумента ζ. Это легко увидеть из рис. C.4(a): $\Delta \arg\zeta = \pi$. Наконец, получаем

$$S_+ = -\frac{\mu a}{2}\ln\frac{2y\varepsilon^2}{a\mu^2} - \frac{i\pi\mu a}{2} + \varepsilon\sqrt{2ay} \tag{C.66}$$

Теперь мы готовы заняться предэкспоненциальными множителями $\xi_{1,\pm}$ в (3.11). Понятно, что $|\varphi\varepsilon/p| \sim \sqrt{|a\zeta|} \gg 1$. Поэтому можно отбросить 1 под квадратным корнем в определении $q_\pm$. Мы уже утверждали выше в этом разделе, что аргумент p равен $\pi/2$. То же самое верно для $\varphi = i$ в окрестности z_0. В результате $\arg[\varepsilon\varphi/p] = 0$. С другой стороны, мы можем отбросить член с μ в нулевом приближении в (C.63). Следовательно, $\arg q_+ = \arg p - \arg(\varphi^2 + 1) = \pi/2 - \pi = -\pi/2$. Наконец, имеем

$$\xi_{1,+} = |\xi_{1,+}|e^{-\frac{i\pi}{2}} = \frac{\varepsilon a}{y}e^{-\frac{i\pi}{2}}. \tag{C.67}$$

Объединяя (C.67), (C.66) и подставляя их в квазиклассическую волновую функцию (3.11), получаем $\psi_{+,>}$ (Уравнение 3.53) в основной части диссертации.

C.8 Точное решение вблизи точки ветвления p в $\mu \ll \varepsilon$

Для решения (3.55) используем метод Лапласа решения дифференциального уравнения с линейными коэффициентами, описанный в Приложении C.2. Многочлены P и Q взяты из уравнения (3.55):

$$P = (3i - 2a\mu)t + \varepsilon^2 a, \quad Q = 2it^2. \tag{C.68}$$

Выполняя интегрирование $\int (P/Q)\,dt$ и меняя $t = \varepsilon s$, получаем решение в виде (3.56) (с точностью до константы перед интегралом). Функция $V(\zeta, t)$ из (C.21) становится:

$$V(\zeta, s) = \exp\left(\zeta\varepsilon s + \frac{\varepsilon a i}{2s}\right) s^{ia\mu+\frac{3}{2}}. \tag{C.69}$$

Для определения регулярных ветвей многозначной функции $s^{ia\mu}$, входящих в точное решение и функцию V, следует провести разрез ветвей из точки $s = 0$. Наиболее подходящее направление — вверх.

C.8.1 Размещение контура

Мы ищем точки на комплексной плоскости s, где функция $V(\zeta, s)$ принимает одинаковые значения. Точки, которые легче всего определить, — это те, где V обращается в нуль.

Предположим, что ζ изначально размещена на правой антистоксовой линии (рис. 3.5(a) справа). Как и в основной части, предположим без потери общности, что a является действительным. Мы видим, что если $s \to +i\infty$ функция $V(\zeta, s) \to 0$. С другой стороны, если $s \to 0$ в вертикальном направлении (см. рис 3.5(a) слева), V также обращается в нуль. Следовательно, контур C, изображенный на рис. 3.5(a), удовлетворяет главному условию размещения.

C.8.2 Метод наискорейшего спуска для правой антистоксовой линии

Чтобы сопоставить точное решение с квазиклассическими выражениями, нам нужно найти асимптотику (3.56) при больших ζ. Как указано в основной части диссертации, экспоненциальная функция (3.57) имеет два седла $s_{1,2}$, причем правое дает правильную квазиклассическую экспоненту (3.53). Направления наискорейшего спуска в седловых точках задаются уравнением C.30 и имеют вид:

$$\alpha(s_{1,2}) = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{C.70}$$

Вычисляя интеграл методом наискорейшего спуска и учитывая, что направление наискорейшего спуска в s_1 равно $\pi/4$, и сравнивая результат с (3.53), мы можем зафиксировать константу перед интегралом в (3.56).

C.8.3 Метод наискорейшего спуска для левой антистоксовой линии

Теперь нам нужно построить аналитическое продолжение точного решения, заданного интегралом (3.56), как только ζ переходит от правой к левой антистоксовой линии и поворачивается на 2π по часовой стрелке.

Контур C должен гарантировать исчезновение $V(\zeta, s)$ в $s \to \infty$ во время всех преобразований ζ. Чтобы компенсировать изменение аргумента ζ на -2π, конечная точка контура должна повернуться на 2π в комплексной плоскости s (как показано на рис. 3.5(c)), превратив его в спираль.

Поскольку разрез ветвей препятствует вращению контура, последний должен пересечь разрез ветвей и продолжиться на втором листе Римана многозначной функции $s^{ia\mu-1/2}$. Все аргументы s на втором листе Римана связаны с аргументами на первом поворотом на 2π: $s|_{\mathrm{second}} = s|_{\mathrm{first}} e^{2\pi i}$.

Пути наискорейшего спуска функции f (3.57) одинаковы на обоих листах Римана. Поэтому для нахождения асимптотики интеграла после преобразования $\zeta \to \zeta e^{2\pi i}$ контур деформируется вдоль кривых наискорейшего спуска на обоих листах Римана, как показано на рис. 3.6. Дуга контура в точке ∞ (рис. 3.6(a)) не вносит вклад в интеграл, поскольку подынтегральное выражение равно нулю во всех точках дуги.

Из структуры контура на рис. (3.6) мы видим, что теперь оба седла вносят вклад в интеграл. Седло s_2 проходится в направлении $-\pi/4$, а седло s_1 проходится дважды. Вклад седла со второго листа Римана идентичен вкладу с первого листа Римана с точностью до постоянного множителя, возникающего из-за другого значения многозначной функции в седле s_1:

$$s_1^{i\mu a-1/2} \to s_1^{i\mu a-1/2} e^{2\pi i(i\mu a-1/2)}. \tag{C.71}$$

Последнее уравнение приводит непосредственно к (3.59) после простой алгебры.

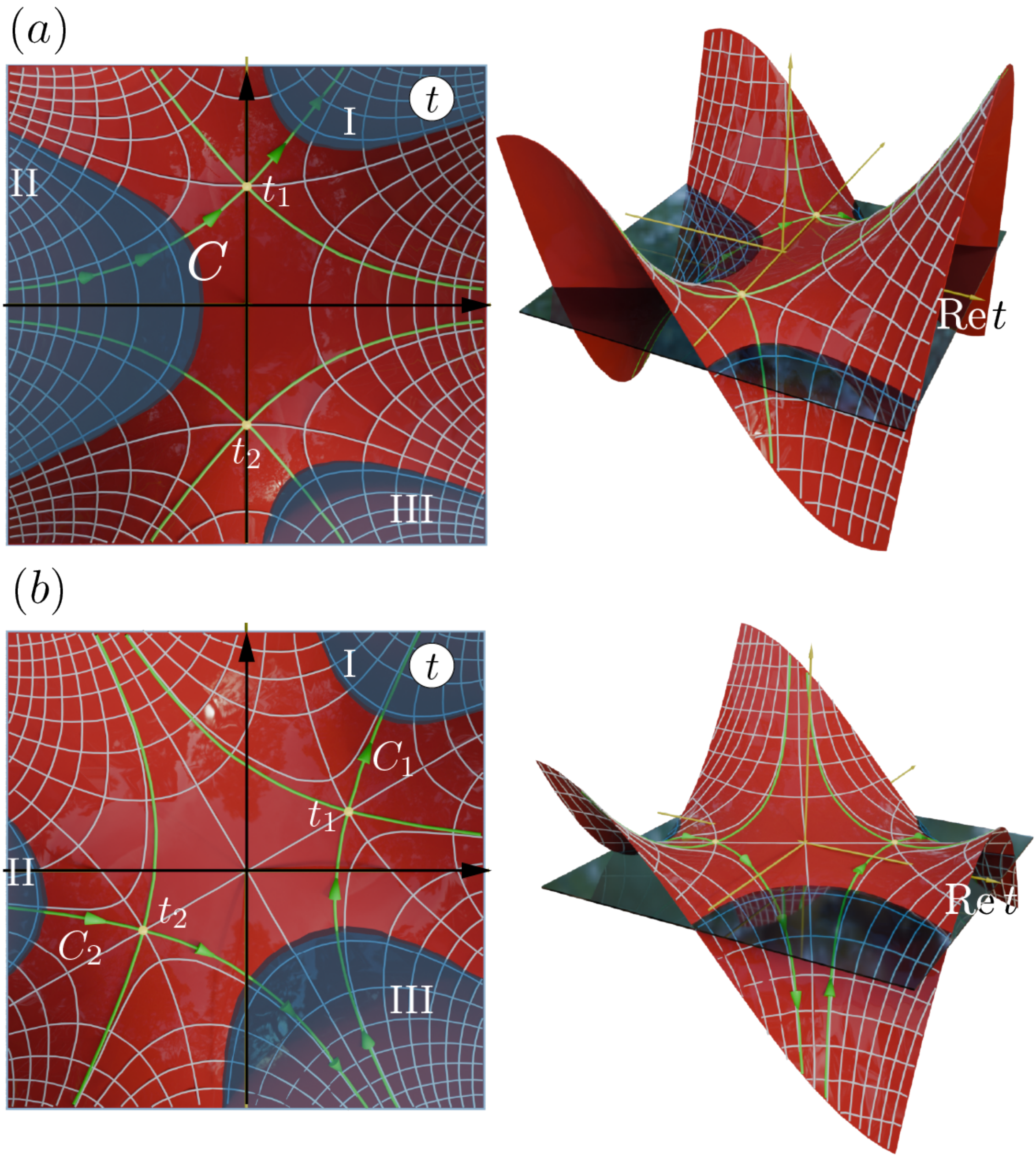

Рис. C.1: Рельеф действительной части функции $f(t) = st + t^3/3$ как функции t. Сетка состоит из стационарных линий $f(t)$. Тонкие зеленые контуры — это линии самого крутого спуска и подъема. Они пересекаются в двух седловых точках (маленькие желтые сферы). Мы также рисуем горизонтальную плоскость для наглядности. Плоскость очерчивает области (I, II, III), где значение $\mathrm{Re}\, f(t)$ стремится к $-\infty$. Это допустимые области для конечных точек размещения контура C (функция $V(s) \to 0$ в этих областях). Эти области также показаны серым цветом на рис. 3.3. (a) соответствует $\arg\, s = 0$, (b) соответствует $\arg\, s = -2\pi/3$.

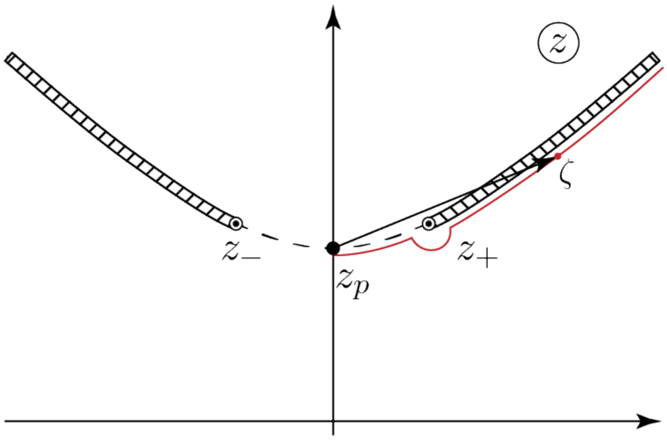

Рис. C.2: Кривые $\mathrm{Im}\varphi^2(z) = 0$ для функции Лоренца $\varphi(z) = (z^2+1)^{-1}$. Кривые образуют гиперболу $y = \sqrt{x^2+1}$.

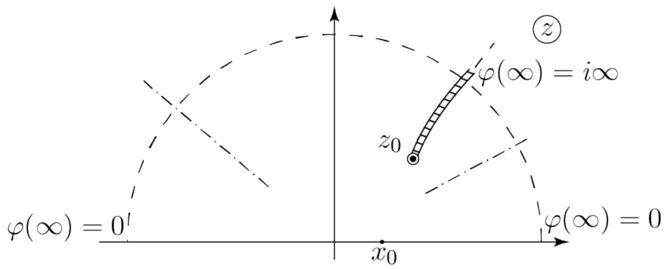

Рис. C.3: Схематическое поведение потенциальной функции $\varphi(z)$ и $\tau(z)$. Пунктирные радианные линии обозначают границы изменения предела $\varphi(\infty)$.

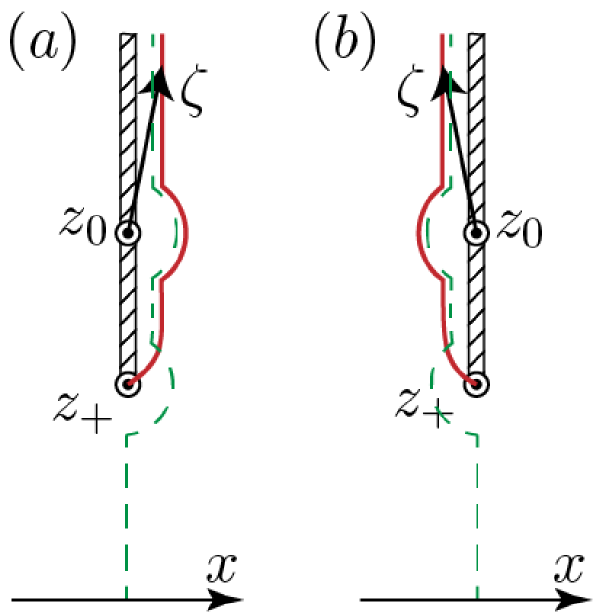

Рис. C.4: Контуры интегрирования (красные кривые) вдоль (a) правой антистоксовой линии, (b) левой антистоксовой линии. Зеленые пунктирные линии представляют путь, по которому следует аргумент p, когда точка ζ перемещается от действительной оси, где p действительно и положительно, вверх вдоль правой (a) и левой (b) антистоксовых линий

Публикации автора по теме диссертации

1. A.S. Dotdaev, Ya. Rodionov and K. Tikhonov. *Instantons in the out-of-equilibrium Coulomb blockade*. Physics Letters A **419**, 127736 (2021)

2. A. S. Dotdaev, Ya. I. Rodionov, K. I. Kugel and B. A. Aronzon. *Effects of anisotropy on the high-field magnetoresistance of Weyl semimetals*. Physical Review B **108**, 165125 (2023)

3(a). A.S. Dotdaev, Y.I. Rodionov, A.V. Rozhkov and P.D. Grigoriev. *Semiclassical Scattering by Edge Imperfections in Topological Insulators in a Magnetic Field.* JETP Letters **120**, 675–686 (2024)

3(b). А.Ш. Дотдаев, Я.И. Родионов, А.В. Рожков и П.Д. Григорьев. *Квазиклассическое рассеяние на краевых дефектах в топологических изоляторах в магнитном поле.* Письма в ЖЭТФ **120**, 701 (2024)

Список литературы

(1) S. V. Panyukov и A. D. Zaikin, *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**, 3168—3171.

(2) G. Falci, G. Schön и G. T. Zimanyi, *Physical review letters*, 1995, **74**, 3257.

(3) X. Wang и H. Grabert, *Physical Review B*, 1996, **53**, 12621.

(4) Y. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**, 1245—1248.

(5) A. Kamenev, *Physical review letters*, 2000, **85**, 4160.

(6) I. S. Beloborodov, A. Andreev и A. Larkin, *Physical Review B*, 2003, **68**, 024204.

(7) J. König и H. Schoeller, *Physical review letters*, 1998, **81**, 3511.

(8) C. P. Herrero, G. Schön и A. D. Zaikin, *Phys. Rev. B*, 1999, **59**, 5728—5737.

(9) X. Wang, R. Egger и H. Grabert, *Europhysics Letters (EPL)*, 1997, **38**, 545—550.

(10) G. Göppert и др., *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81**, 2324—2327.

(11) S. L. Lukyanov, A. M. Tsvelik и A. B. Zamolodchikov, *Nuclear Physics B*, 2005, **719**, 103—120.

(12) S. L. Lukyanov и P. Werner, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2006, **2006**, P11002.

(13) C. Pasquier и др., *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, 69—72.

(14) A. G. Huibers и др., *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81**, 1917—1920.

(15) L. Bitton и др., *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **106**, 016803.

(16) O. Bitton и др., *Nature Communications*, 2017, **8**, 402.

(17) A. Altland и др., *Annals of Physics*, 2005, **321**, 2566—2603.

(18) S. Korshunov, *JETP Lett*, 1987, **45**.

(19) I. S. Burmistrov и A. M. M. Pruisken, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **101**, 056801.

(20) I. S. Burmistrov и A. M. M. Pruisken, *Phys. Rev. B*, 2010, **81**, 085428.

(21) Y. I. Rodionov, I. Burmistrov и N. Chtchelkatchev, *Physical Review B*, 2010, **82**, 155317.

(22) I. Burmistrov, *Low Temperature Physics*, 2017, **43**, 95—100.

(23) M. Titov и D. Gutman, *Physical Review B*, 2016, **93**, 155428.

(24) A. Burkov и L. Balents, *Physical review letters*, 2011, **107**, 127205.

(25) X. Wan и др., *Phys. Rev. B*, 2011, **83**, 205101.

(26) S.-Y. Xu и др., *Science*, 2015, **347**, 294—298.

(27) B. Lv и др., *Phys. Rev. X*, 2015, **5**, 031013.

(28) Z. K. Liu и др., *Nat. Mater.*, 2014, **13**, 677—681.

(29) M. Neupane и др., *Nat. Commun.*, 2014, **5**, 3786.

(30) S. Borisenko и др., *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **113**, 027603.

(31) S. Jeon и др., *Nat. Mater.*, 2014, **13**, 851—856.

(32) E. Fradkin, *Phys. Rev. B*, 1986, **33**, 3263.

(33) S. Syzranov, L. Radzihovsky и V. Gurarie, *Phys. Rev. Lett.*, 2015, **114**, 166601.

(34) S.-Y. Xu и др., *Science*, 2015, **349**, 613—617.

(35) N. Armitage, E. Mele и A. Vishwanath, *Rev. Mod. Phys.*, 2018, **90**, 015001.

(36) A. Burkov, *Ann. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2018, **9**, 359—378.

(37) D. Son и B. Spivak, *Phys. Rev. B*, 2013, **88**, 104412.

(38) S. Parameswaran и др., *Phys. Rev. X*, 2014, **4**, 031035.

(39) A. A. Abrikosov, *Phys. Rev. B*, 1998, **58**, 2788—2794.

(40) X. Xiao, K. T. Law и P. A. Lee, *Phys. Rev. B*, 2017, **96**, 165101.

(41) J. Klier, I. V. Gornyi и A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B*, 2017, **96**, 214209.

(42) Y. I. Rodionov, K. I. Kugel и B. A. Aronzon, *Phys. Rev. B*, 2023, **107**, 155120.

(43) Y. I. Rodionov, K. I. Kugel и F. Nori, *Phys. Rev. B*, 2015, **92**, 195117.

(44) I. Žuti ć, J. Fabian и S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.*, 2004, **76**, 323—410.

(45) C. Nayak и др., *Rev. Mod. Phys.*, 2008, **80**, 1083—1159.

(46) J. Moore, *Nature Physics*, 2009, **5**, 378—380.

(47) M. König и др., *Science*, 2007, **318**, 766—770.

(48) D. Hsieh и др., *Nature*, 2008, **452**, 970—974.

(49) Z. D. Kvon и др., *Physics-Uspekhi*, 2020, **63**, 629—647.

(50) O. Deb, A. Soori и D. Sen, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2014, **26**, 315009.

(51) T. M. Herath, P. Hewageegana и V. Apalkov, *Phys. Rev. B*, 2013, **87**, 075318.

(52) N. I. Fedotov и S. V. Zaitsev-Zotov, *Physical Review B*, 2017, **95**.

(53) C. L. Kane и E. J. Mele, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **95**, 226801.

(54) J. Hinz и др., *Semiconductor Science and Technology*, 2006, **21**, 501—506.

(55) H. Yang и др., *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2014, **26**, 395005.

(56) M. V. Durnev и S. A. Tarasenko, *Phys. Rev. B*, 2016, **93**, 075434.

(57) H. Grabert и H. Horner, *Special issue on single charge tunneling*, Springer, 1991.

(58) H. Grabert и M. H. Devoret, *Single charge tunneling: Coulomb blockade phenomena in nanostructures*, Springer Science & Business Media, 2013, т. 294.

(59) I. Aleiner, P. Brouwer и L. Glazman, *Physics Reports*, 2002, **358**, 309—440.

(60) G. Schön и A. D. Zaikin, *Physics Reports*, 1990, **198**, 237—412.

(61) K. Likharev и A. Zorin, *Journal of low temperature physics*, 1985, **59**, 347—382.

(62) D. Averin и K. Likharev, *Journal of low temperature physics*, 1986, **62**, 345—373.

(63) Y. M. Blanter и M. Büttiker, *Phys. Rep.*, 2000, **336**, 1.

(64) K. K. Likharev, *Proceedings of the IEEE*, 1999, **87**, 606—632.

(65) T. Liang и др., *Nat. Mater.*, 2015, **14**, 280—284.

(66) J. Feng и др., *Phys. Rev. B*, 2015, **92**, 081306.

(67) M. Novak и др., *Phys. Rev. B*, 2015, **91**, 041203.

(68) Y. Zhao и др., *Phys. Rev. X*, 2015, **5**, 031037.

(69) Z. K. Liu и др., *Science*, 2014, **343**, 864—867.

(70) G. Dhakal и др., *Phys. Rev. B*, 2022, **106**, 125124.

(71) Y. Huang и др., *Adv. Mater.*, 2023, **35**, 2208362.

(72) G. M. Gusev и др., *Phys. Rev. B*, 2014, **89**, 125305.

(73) A. Dotdaev, Y. Rodionov и K. Tikhonov, *Physics Letters A*, 2021, **419**, 127736.

(74) A. S. Dotdaev и др., *Phys. Rev. B*, 2023, **108**, 165125.

(75) A. S. Dotdaev и др., *JETP Letters*, 2024, **120**, 675—686.

(76) K. B. Efetov и A. Tschersich, *Phys. Rev. B*, 2003, **67**, 174205.

(77) K. B. Efetov и A. Tschersich, *Phys. Rev. B*, 2003, **67**, 174205.

(78) V. Ambegaokar, U. Eckern и G. Schön, *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **48**, 1745—1748.

(79) F. Guinea, *Physical Review B*, 2002, **65**, 205317.

(80) F. Guinea, *Physical Review B*, 2003, **67**, 045103.

(81) L. V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP*, 1965, **20**, 1018—1026.

(82) Y. Blanter, *Physical Review B*, 1996, **54**.

(83) Y. I. U. Sivan и A. G. Aronov, *Europhysics Letters*, 1994, **28**, 115—120.

(84) B. Braunecker, *Physical Review B*, 2006, **73**, 075122.

(85) B. Muzykantskii и Y. Adamov, *Physical Review B*, 2003, **68**, 155304.

(86) A. Cherman и M. Unsal, *arXiv preprint arXiv:1408.0012*, 2014.

(87) H. B. Nielsen и M. Ninomiya, *Nucl. Phys. B*, 1981, **185**, 20—40.

(88) J. Klier, I. V. Gornyi и A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B*, 2015, **92**, 205113.

(89) V. R. Khalilov и I. V. Mamsurov, *The European Physical Journal C*, 2015, **75**, 167.

(90) J.-P. Jay-Gerin, M. Aubin и L. Caron, *Solid State Commun.*, 1977, **21**, 771—774.

(91) G. Krizman и др., *Phys. Rev. B*, 2019, **100**, 155205.

(92) B. Lv и др., *Nat. Phys.*, 2015, **11**, 724—727.

(93) Y. I. Rodionov и S. V. Syzranov, *Phys. Rev. B*, 2015, **91**, 195107.

(94) S. Jeon и др., *Nat. Mater.*, 2014, **13**, 851—856.

(95) V. Pokrovskii и I. Khalatnikov, *Soviet Phys. JETP*, 1961, **13**, 1207—1210.

(96) X.-L. Qi и S.-C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.*, 2011, **83**, 1057—1110.

(97) Y. A. Bychkov и E. I. Rashba, *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 1984, **17**, 6039—6045.

(98) Y. Zhang и др., *Nature Physics*, 2010, **6**, 584—588.

(99) T. Kernreiter и др., *Physical Review X*, 2016, **6**, 021010.

(100) A. A. Zyuzin, M. D. Hook и A. A. Burkov, *Phys. Rev. B*, 2011, **83**, 245428.

(101) M. V. Berry, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1982, **15**, 3693.

(102) E. T. Whittaker и G. N. Watson, *A course of modern analysis: an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions*, University press, 1920.

(103) M. Schultz и др., *Semiconductor science and technology*, 1996, **11**, 1168.

(104) S. S. Krishtopenko и F. Teppe, *Phys. Rev. B*, 2018, **97**, 165408.

(105) K.-M. Dantscher и др., *Physical Review B*, 2017, **95**, 201103.

(106) M. Yakunin и др., *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2010, **42**, 18th International Conference on Electron Properties of Two-Dimensional Systems, 948—951.

(107) L. D. Landau и E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, Elsevier, 2013, т. 3.

(108) É. Goursat, *A Course in Mathematical Analysis: pt. 2. Differential equations.* Dover Publications, 1916, т. 2.

(109) F. Olver, *Asymptotics and special functions*, AK Peters/CRC Press, 1997.